UNIVERSITÄT ZU KÖLN

5. Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik in zwei Semestern II
Prof. Dr. Joachim Krug, Dr. Vladislav Popkov
Institut für Theoretische Physik
Wintersemester 2005/2006

Abgabe:Montag, den 28.11.2005 bis 12.00 Uhr im Raum 102 des Instituts für Kernphysik

Aufgabe 19: Der harmonische Oszillator
(a) Wenden Sie die Ehrenfest'sche Gleichungen von Aufgaben 14 und 18 auf den harmonischen Oszillator an um zu zeigen dass der Erwartungswert des Ortes, $\langle x \rangle$, die klassische Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = -\omega^2 \langle x \rangle$$

genügt.
(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Grundzustand $u^{(0)}$ des harmonischen Oszillators durch die Gleichung $\hat{a} u^{(0)} = 0$ bestimmt ist, wo $\hat{a}$ der Absteigeoperator bezeichnet. In Ortsdarstellung mit dimensionsloser Ortskoordinate ξ lautet diese Gleichung explizit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right) u^{(0)}(\xi) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Gleichung eine Gauss-Funktion $\exp -\beta\xi^2$ ist und Bestimmen Sie die Breite β.
(c) Weitere Eigenfunktionen lassen sich aus $u^{(0)}$ durch Anwendung des Aufsteigeoperators

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right)$$

gewinnen. Bestimmen Sie auf diese Weise die Eigenfunktionen $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$. Verifizieren Sie, dass diese die Form eines Produktes der Gauss-Funktion $u^{(0)}$ mit einem Polynom $H_n(\xi)$ vom Grade n haben.
(4 Punkte)

Aufgabe 20: Die Pauli Matrizen
Der Spin eines Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens (wie z.B. des Elektrons) wird durch den Operator $\hat{\mathbf{S}} = (\hbar/2)\hat{\sigma}$ dargestellt, wobei die drei Komponenten $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ von $\hat{\sigma}$ die *Pauli-Matrizen*

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind.
(a) Überzeugen Sie sich durch Nachrechnen, dass die Komponenten von $\hat{\mathbf{S}}$ die charakteristischen Vertauschungsrelationen

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z \qquad + \text{ zyklische Permutationen} \quad (xyz)$$

eines quantenmechanischen Drehimpulses erfüllen.
(b) Zeigen Sie, dass die Operatoren $\hat{\sigma}^2_{x,y,z}$ alle proportional zur Einheitsmatrix sind, und schliessen Sie daraus auf die Eigenwerte von $\hat{S}_{x,y,z}$; alternativ können diese natürlich auch direkt aus den charakteristischen Polynomen der Matrizen abgelesen werden.
(4 Punkte)

Aufgabe 21: Eine Darstellung für Spin 1
Der Spin eines Spin-1 Teilchens kann analog zu dem des Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens durch Matrizen dargestellt werden. Diese müssen nun 3×3 Matrizen sein; die folgenden Matrizen sind geeignet:

$$\hat{s}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{s}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{s}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Prüfen Sie wieder nach, dass diese Matrizen die typische Vertauschungsrelationen für den Drehimpuls aufweisen.
(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2 + \hat{s}_z^2 = 2I$ gilt, mit I die 3×3 Einheitsmatrix, so dass der Eigenwert $s(s+1)$ mit $s = 1$ ist, wie es sich für ein Spin-1 Teilchen gehört.
(4 Punkte)