UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Institut für Theoretische Physik
Wintersemester 2005/2006

6. Übung zur Vorlesung "Theoretische Physik in zwei Semestern II"

Abgabe: Montag, den 5.12.2005 bis 12.00 Uhr im Raum 102 des Instituts für Kernphysik

Aufgabe 22: Der zweidimensionale harmonische Oszillator

Der zweidimensionale isotrope harmonische Oszillator ist definiert durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p_x}^2 + \hat{p_y}^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2\left[\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right]. \tag{1}$$

a.) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von (1) gegeben sind durch $E_n = (n+1)\hbar\omega, n = 0, 1, 2...$, indem Sie für die Lösung einen Produktansatz aus Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators verwenden, also $u(x, y) = u^{(n_x)}(x)u^{(n_y)}(y)$. Zeigen Sie weiter, dass der Zustand mit Energie E_n $(n + 1)-$fach entartet ist. *2 Punkte*

b.) Wie in der Vorlesung für den eindimensionalen Fall vorgeführt, lassen sich für die beiden unabhängigen Koordinaten x und y Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger_{x,y}, a_{x,y}$ definieren; diese genügen den Vertauschungsrelationen $(r, s = x, y)$

$$[a_r, a_s] = [a^\dagger_r, a^\dagger_s] = 0, \qquad [a_r, a^\dagger_s] = \delta_{rs}, \tag{2}$$

mit dem Kronecker-Symobol $\delta_{rs} = 1$ für $r = s$, und $\delta_{rs} = 0$ sonst. Hieraus lassen sich neue Operatoren $\hat{S}$ und $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ gewinnen durch

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\left[a^\dagger_x a_x + a^\dagger_y a_y\right] \tag{3}$$

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2}\left[a^\dagger_y a_x + a^\dagger_x a_y\right] \quad \hat{J}_2 = \frac{1}{2}i\left[a^\dagger_y a_x - a^\dagger_x a_y\right] \quad \hat{J}_3 = \frac{1}{2}\left[a^\dagger_x a_x - a^\dagger_y a_y\right] \tag{4}$$

Es gilt $\hat{H} = \hbar\omega(2\hat{S} + 1)$. Zeigen Sie, dass die Komponenten von $\vec{J} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$ den typischen Vertauschungsrelationen für den Drehimpuls genügen und dass $|\vec{J}|^2 = \hat{S}(\hat{S}+1)$ gilt. Was folgt daraus für die Eigenwerte von $\hat{S}$ bzw. von $\hat{H}$, sowie für deren Entartung? Vergleichen Sie mit den Ergebnissen von Teil a.). *4 Punkte*

Aufgabe 23: Vom Zweikörperproblem zum Einkörperproblem

Ein wasserstoffähnliches Atom besteht aus einem Elektron der Masse m_e, das mit einem Kern der Masse m_n und Ladung Ze wechselwirkt. Der Hamilton-Operator dieses Zweiteilchen-Systems lautet

$$\hat{H} = \frac{|\vec{p}_e|^2}{2m_e} + \frac{|\vec{p}_n|^2}{2m_n} - \frac{Ze^2}{|\vec{r}_e - \vec{r}_n|}, \tag{5}$$

wobei $\vec{p}_{e,n}$ und $\vec{r}_{e,n}$ die Impulse und Orte der beiden Teilchen bezeichnen. Um das Zweiteilchen-Problem auf das in der Vorlesung behandelte Einteilchen-Coulomb-Problem zu reduzieren, führen wir den Schwerpunktsimpuls $\vec{P} = \vec{p}_e + \vec{p}_n$, die Schwerpunktskoordinate $\vec{R} = (m_e\vec{r}_e + m_n\vec{r}_n)/(m_e + m_n)$, die Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_n$ und den zugehörigen Impuls der Relativbewegung $\vec{p} = (m_n\vec{p}_e - m_e\vec{p}_n)/(m_e + m_n)$ ein.

a.) Zeigen Sie, dass die Komponenten der Schwerpunkts- und Relativkoordinaten und der zugehörigen Impulse die Vertauschungsrelationen

$$[R_a, P_b] = i\hbar\delta_{a,b}, \quad [r_a, p_b] = i\hbar\delta_{a,b}, \qquad a, b = x, y, z \tag{6}$$

erfüllen, und dass alle Komponenten von $\vec{P}$ mit $\vec{r}$, und alle Komponenten von $\vec{p}$ mit $\vec{R}$ kommutieren. Aus (6) folgt insbesondere, dass $\vec{P}$ und $\vec{p}$ sich durch die üblichen Ersetzungregeln als Ableitungen nach $\vec{R}$ bzw. $\vec{r}$ darstellen lassen, also $\vec{P} = -i\hbar\nabla_{\vec{R}}$ und $\vec{p} = -i\hbar\nabla_{\vec{r}}$. *2 Punkte*

b.) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator (5) in den neuen Koordinaten die Form

$$\hat{H} = \frac{|\vec{p}|^2}{2\mu} + \frac{|\vec{P}|^2}{2M} - \frac{Ze^2}{|\vec{r}|} \tag{7}$$

annimmt, mit der Gesamtmasse $M = m_e + m_n$ und der reduzierten Masse $\mu = m_e m_n / M$. *2 Punkte*

c.) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen von (7) Produktwellenfunktionen von der Form $\psi(\vec{r}, \vec{R}) = u(\vec{r})\Phi(\vec{R})$ sind, wobei $\Phi(\vec{R})$ die freie Bewegung des Schwerpunktes beschreibt und $u(\vec{r})$ die in der Vorlesung behandelte Einteilchen-Schrödingergleichung löst. *1 Punkt*

Aufgabe 24: Identische Teilchen im eindimensionalen Kastenpotential

Das eindimensionale Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden ist aus der Vorlesung und aus den Aufgaben 7 und 10 bekannt. In dieser Aufgabe betrachten wir mehrere identische, unabhängige Teilchen im Kastenpotential. Jedes Teilchen ist also auf das eindimensionale Intervall $-a/2 \le x \le a/2$ eingeschränkt, es gibt aber keine Wechselwirkung zwischen den Teilchen.

a.) Betrachten Sie zwei Fermionen, die sich im gleichen Spin-Zustand befinden sollen[1]. Geben Sie die Grundzustands-Wellenfunktion $u(x_1, x_2)$ an sowie die zugehörige gemeinsame Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|u(x_1, x_2)|^2$. Skizzieren Sie letztere als Funktion von x_1, wenn $x_2 = 0$ festgehalten wird. Interpretation? *2 Punkte*

c.) Betrachten Sie nun eine allgemeine Zahl N von Teilchen; Sie können annehmen, dass N gerade ist. Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie $E_B(N)$ für N Bosonen, und $E_F(N)$ für N Fermionen mit Spin 1/2. Vergleichen Sie in den beiden Fällen die Abhängigkeit der Grundzustandsenergie *pro Teilchen* von der Teilchenzahl N und der Teilchendichte N/a, wenn N gross wird.
Hinweis: $\sum_{k=1}^{N} k^2 = N(N+1)(2N+1)/6$ *2 Punkte*

[1] Das heisst, dass die Zweiteilchen-Wellenfunktion antisymmetrisch sein muss.