

8. Übung zur Vorlesung “Theoretische Physik in zwei Semestern II”

Abgabe: Montag, den 9.1.2006 bis 12.00 Uhr im Raum 102 des Instituts für Kernphysik

Aufgabe 29: Rechnen mit Differentialen II

In der Thermodynamik betrachtet man oft infinitesimale Änderungen von Grössen wie Wärme und Arbeit, die keine Zustandsgrössen sind. Bei zwei unabhängigen Variablen x, y lässt sich ein solches Differential allgemein in der Form

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy \quad (1)$$

schreiben. Existiert eine Funktion f sodass $\omega = df$, so heisst das Differential *vollständig*. Aus dem Vergleich von (1) mit Gleichung (1) von Blatt 7 folgt, dass dann $a = \partial f / \partial x$ und $b = \partial f / \partial y$ gelten muss. Eine *notwendige* Bedingung für die Vollständigkeit des Differentials ist deshalb¹

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}. \quad (2)$$

a.) Welche der folgenden Differentiale sind [gemäss der Bedingung (2)] vollständig?

$$(i) \sin(x)dx + \cos(y)dy \quad (ii) ydx + xdy \quad (iii) e^y dx + e^x dy.$$

3 Punkte

b.) Lässt sich ein nicht-vollständiges Differential durch Multiplikation mit einer Funktion $\phi(x, y)$ in die vollständige Form bringen, so heisst ϕ *integrierender Faktor*. Finden Sie einen integrierenden Faktor zum Beispiel (iii). 2 Punkte

Aufgabe 30: Responsegrössen

Beispiele für Responsegrössen sind die isotherme Kompressibilität κ_T , die adiabatische Kompressibilität κ_S , und der thermische Ausdehnungskoeffizient α , welche durch die Beziehungen

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \quad \kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S, \quad \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

definiert sind.

¹Bei einfach zusammenhängendem Integrationsgebiet folgt daraus die Wegunabhängigkeit von Wegintegralen, und damit die Existenz von f . Dies ist völlig analog zu der Bedingung der Wirbelfreiheit eines Vektorfeldes in der Elektrodynamik.

- a.) Berechnen Sie κ_T und α für das klassische ideale Gas, und verifizieren Sie (unter Benutzung des Ergebnisses von Aufgabe 27) die Beziehung²

$$C_P - C_V = \frac{V\alpha^2 T}{\kappa_T}. \quad (3)$$

2 Punkte

- b.) Bestimmen Sie mit Hilfe der Adiabatangleichung (Aufgabe 28) die adiabatische Kompressibilität des klassischen idealen Gases, und zeigen Sie, dass

$$\kappa_T / \kappa_S = C_P / C_V. \quad (4)$$

2 Punkte

Aufgabe 31: Entropieänderung bei Temperatenausgleich

Zwei Körper, die aus der gleichen Menge desselben Materials bestehen, befinden sich zunächst bei unterschiedlichen Temperaturen T_1 und T_2 , mit $T_1 < T_2$. Sie werden in thermischen Kontakt gebracht. Nach dem Temperatenausgleich nimmt die Temperatur den Wert $T = (T_1 + T_2)/2$ an. Berechnen Sie die Entropieänderungen ΔS_1 und ΔS_2 der beiden Körper, und zeigen Sie, dass die Entropieänderung $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ des Gesamtsystems stets positiv ist. Sie können annehmen, dass der Prozess ohne Volumenänderung abläuft und die Wärmekapazitäten $C_V^{(1)} = C_V^{(2)} = C_V$ der beiden Körper unabhängig von der Temperatur sind.

3 Punkte

Aufgabe 32: Eigenschaften der Entropie

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die thermodynamische Entropie $S(E, V, N)$ (unter anderem) durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert ist:

- (i) S ist homogen ersten Grades.
- (ii) $\partial^2 S / \partial E^2 \leq 0$.
- (iii) $S = 0$ bei $T = 0$.

Untersuchen Sie, welche der folgenden Ausdrücke diese Bedingungen erfüllen:

$$\text{a.) } S = C_1(NVE)^{1/3} \quad \text{b.) } S = C_2(NE^2/V) \quad \text{c.) } S = k_B N \ln(C_3 E^{3/2} V / N^{5/2}).$$

Hier sind C_1, C_2, C_3 positive Konstanten, die die Ausdrücke dimensionsmässig konsistent machen. Der Ausdruck c.) ist die Entropie des klassischen idealen Gases.

6 Punkte

²Die Gleichungen (3) und (4) sind allgemeine thermodynamische Relationen, die unabhängig von der betrachteten Substanz gelten. Eine Herleitung finden Sie bei D. Stauffer, *Theoretische Physik*, auf Seite 121.