

9. Übung zur Vorlesung “Theoretische Physik in zwei Semestern II”

Abgabe: Montag, den 16.1.2006 bis 12.00 Uhr im Raum 102 des Instituts für Kernphysik

Aufgabe 33: Entropieänderung bei freier Expansion

Ein ideales Gas in einem Kasten mit Volumen V wird zunächst durch eine Wand auf die Hälfte $V/2$ des Volumens eingeschränkt. Nun wird die Wand entfernt, und das Gas expandiert, ohne Arbeit zu leisten, auf das volle Volumen. Bestimmen Sie die Zunahme der Entropie, die mit diesem Vorgang verbunden ist. Um welchen Faktor nimmt die Zahl der dem Gas verfügbaren Mikrozustände zu? Wie gross ist dieser Faktor, wenn das Gas aus $N = 10$, $N = 1000$ oder $N = 10^6$ Teilchen besteht? 3 Punkte

Aufgabe 34: Die Entropie des Vergessens

Rolf Landauer¹ hat gezeigt, dass das Löschen eines Bits Information mindestens die Entropie $k_B \ln 2$ erzeugt. Berechnen Sie die Wärmemenge, die durch diesen Effekt entsteht, wenn bei Raumtemperatur der Inhalt einer Festplatte mit einer Kapazität von 80 GB gelöscht wird. Warum ist diese Wärmemenge so klein?² 2 Punkte

Aufgabe 35: Idealer Paramagnet

Als einfaches Modell eines Paramagneten betrachten wir N unabhängige Spins mit je zwei Einstellmöglichkeiten $\sigma_i = \pm 1/2$ für die z -Komponenten σ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, in einem Magnetfeld der Stärke B , das ebenfalls in z -Richtung zeigt. Der Mikrozustand des Systems ist charakterisiert durch die Angabe der N Spineinstellungen, es gibt somit 2^N Mikrozustände. Die Energie eines Mikrozustands $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ ist

$$E(\sigma) = -2\mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i = -E_0(N_+ - N_-),$$

wobei $E_0 = \mu B$ und μ das magnetische Moment eines Spins ist. Hier bezeichnen N_+ bzw. N_- die Zahl Spins mit $\sigma_i = 1/2$ bzw. $\sigma_i = -1/2$, wobei $N_+ + N_- = N$. Die möglichen Energiewerte sind somit $-E_0N, -E_0(N-2), \dots, E_0N$. In Bezug auf die makroskopische

¹R. Landauer: *Irreversibility and heat generation in the computing process*. IBM Journal of Research and Development **5**, 183 (1961).

²S. dazu J. Machta: *Entropy, information, and computation*. American Journal of Physics **67**, 1074 (1999), verfügbar unter <http://www.thp.uni-koeln.de/krug/>.

Zustandsvariable E gibt es nur N Makrozustände, die (fast alle) für grosse N hochgradig entartet sind.

Die Zahl $\Omega(E, N)$ der Mikrozustände zur Energie E ist offensichtlich gleich der Anzahl von Möglichkeiten $\Omega(N_-, N)$, aus N Spins diejenigen N_- Spins mit $\sigma_i = 1/2$ auszuwählen, wobei $E = E_0(2N_- - N)$. Aus einfachen kombinatorischen Überlegungen folgt

$$\Omega(N_-, N) = \binom{N}{N_-} = \frac{N!}{N_+! N_-!} \quad (1)$$

- a.) Zur Auswertung von (1) für grosse N benötigt man die *Stirling'sche Formel* in der einfachen Form

$$N! \approx (N/e)^N. \quad (2)$$

Beweisen Sie diese Beziehung, indem Sie $\ln(N!)$ als Summe schreiben und diese durch ein Integral annähern. 2 Punkte

- b.) Berechnen Sie mittels der Beziehungen (1) und (2) die Entropie $S = k_B \ln \Omega$ des Paramagneten. Lassen Sie N gross werden, und halten Sie dabei die Verhältnisse N_{\pm}/N fest. Stellen Sie die Entropie dar in der manifest homogenen Form

$$S(E, N) = Ns(E/N). \quad (3)$$

5 Punkte

- c.) Skizzieren Sie die Funktion $s(x)$ aus (3) und zeigen Sie (qualitativ), dass die absolute Temperatur des Paramagneten für Energien $E > 0$, bei denen die Mehrheit der Spins gegen das Magnetfeld ausgerichtet sind, *negativ* ist. 2 Punkte

Aufgabe 36: Negative absolute Temperatur

Wie das Beispiel von Aufgabe 35 c.) zeigt, können Systeme mit nach oben beschränkter Energie Zustände negativer absoluter Temperatur aufweisen. Wie heiss ist ein System mit $T < 0$? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir zwei Systeme mit Anfangstemperaturen T_1 und T_2 , die (durch einen quasistatischen Prozess) in Kontakt gebracht werden. Bestimmen Sie die Richtung des Energieflusses zwischen den beiden Systemen, falls (i) $T_1 > T_2 > 0$, (ii) $T_1 > 0 > T_2$ und (iii) $0 > T_1 > T_2$. Benutzen Sie dazu den zweiten Hauptsatz in seiner differentiellen Form. Welche ist die natürliche Anordnung der Temperaturachsen $T > 0$ und $T < 0$, wenn man fordert, dass die Energie stets vom heisseren zum kälteren System fließen soll? Vergleichen Sie mit der Anordnung, die sich in Aufgabe 35 c.) als Funktion der Energie ergibt. 4 Punkte