

Musterlösung zu den Aufgaben 8 und 9

Aufgabe 8: Eigenschaften der Fourier-Transformation

Für den Beweis verwenden wir die folgenden beiden Eigenschaften der Deltafunktion:

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-y)} \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x - y) f(y) = f(x) \quad (2)$$

Nun benutzen wir die Definition der Amplitudenfunktion

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ikx} \\ \Rightarrow A^*(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) e^{ikx} \\ \Rightarrow |A(k)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi^*(y) e^{iky} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi(x) \psi^*(y) e^{-ik(x-y)} \end{aligned}$$

damit ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk |A(k)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi(x) \psi^*(y) e^{-ik(x-y)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi^*(y) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-y)}}_{\delta(x-y)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) \psi^*(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Zum Beweis der zweiten Gleichung berechnen wir zuerst die Fourier-Transformation von $\frac{d}{dx}\psi(x)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d}{dx} \psi(x) \right) e^{-ikx} \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \left[\frac{1}{2\pi} \psi(x) e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) \underbrace{\left(\frac{d}{dx} e^{-ikx} \right)}_{-ike^{-ikx}}$$

Der ausintegrierte Teil verschwindet (wir können davon ausgehen, dass die Wellenfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen Null geht), so dass

$$ikA(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d}{dx} \psi(x) \right) e^{-ikx}$$

d.h. bei der Fouriertransformation wird die Ableitung $\frac{d}{dx}$ zur Multiplikation mit ik . Durch Bildung des Betragsquadrats und unter Benutzung der Beziehung (3) erhält man die angegebene Gleichung.

Einige Bemerkungen zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die Verteilungsfunktion $P(X)$ einer reellen Zufallsvariable X hat die beiden Eigenschaften¹

$$P(x) \geq 0 \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x) = 1 \quad (5)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen a und b annimmt ist gegeben durch

$$\text{Prob}[a \leq x \leq b] = \int_a^b dx P(x) \quad (6)$$

Die Eigenschaft (4) garantiert hierbei dass die Wahrscheinlichkeit immer positiv ist und (5) sorgt dafür, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit $\text{Prob}[-\infty \leq x \leq \infty]$ gleich 1 ist.

Mittelwerte einer Funktion $f(X)$ werden nach folgender Formel berechnet:

$$\langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) P(x) \quad (7)$$

Wichtige Beispiele hierfür sind der Mittelwert $\langle X \rangle$ und das zweite Moment $\langle X^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x P(x) \\ \langle X^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 P(x) \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Größen lässt sich die Varianz² $(\Delta X)^2$ bilden

$$\begin{aligned} (\Delta X)^2 &= \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \end{aligned}$$

¹Wenn der Bereich der Variablen X nicht alle reellen Zahlen umfasst erstreckt sich die Integration in den folgenden Formeln jeweils über diesen eingeschränkten Bereich

²Die Varianz ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichung von X von seinem Mittelwert $\langle X \rangle$

Aufgabe 9: Gauss'sche Integrale

a.)

$$\begin{aligned} I_0^2(a, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a(x^2+y^2)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r dr e^{-ar^2} \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{a} \\ \Rightarrow I_0^2(a, 0) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned} I_0(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx} \\ &\stackrel{\text{Subs.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2+b(x+\frac{b}{2a})} \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

c.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} I_0(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial b} e^{-ax^2+bx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-ax^2+bx} \\ &= I_1(a, b) \\ \Rightarrow I_1(a, b) &= \frac{\partial}{\partial b} I_0(a, b) = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{b}{2a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} I_0(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial a} e^{-ax^2+bx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (-x^2) e^{-ax^2+bx} \\ &= -I_2(a, b) \\ \Rightarrow I_2(a, b) &= -\frac{\partial}{\partial a} I_0(a, b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \left(\frac{1}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

Mittelwert und Varianz ergeben sich durch

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= (I_0(a, b))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x e^{-ax^2+bx} \\ &= (I_0(a, b))^{-1} I_1(a, b) = \frac{b}{2a} \\ \langle x^2 \rangle &= (I_0(a, b))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x^2 e^{-ax^2+bx} \\ &= (I_0(a, b))^{-1} I_2(a, b) = \frac{1}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \Rightarrow (\Delta x)^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{2a}\end{aligned}$$