

Musterlösung zur Aufgabe 13

Aufgabe 13: Zeitentwicklung von Erwartungswerten

Wir verwenden wieder die Schrödinger-Gleichung und ihr Adjungiertes

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle &= \hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle \\ -i\hbar \frac{d}{dt}\langle\psi| &= \langle\psi|\hat{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

Damit berechnet sich die Zeitableitung des Erwartungswertes nach

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle &= \left(\frac{d}{dt}\langle\psi|\right)\hat{A}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{A}\left(\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right) \\ &= -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{\mathcal{H}}\hat{A}|\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{A}\hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\langle\psi|(\hat{\mathcal{H}}\hat{A} - \hat{A}\hat{\mathcal{H}})|\psi\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar}\langle\psi|[\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}]|\psi\rangle\end{aligned}$$

Anmerkung: Die Formel gilt nur für Operatoren $\hat{A}$, die nicht explizit von der Zeit abhängen. Andernfalls entsteht auf der rechten Seite ein zusätzlicher Term, der die Zeitableitung von $\hat{A}$ enthält.