

2. Klausur zur Vorlesung "Theoretische Physik in zwei Semestern II"

Musterlösungen

1. *Wie lauten die drei Hauptsätze der Thermodynamik, in Worten und in Formeln? Definieren Sie sorgfältig die auftretenden Grössen, und erläutern Sie insbesondere die Begriffe Arbeit, Wärme, und Irreversibilität.*

Die Antworten finden Sie in den Abschnitten 2.2 und 2.4 des Skripts, insbesondere Gl.(2.9) und (2.22)-(2.26); zum Ursprung der Irreversibilität auch 3.3.2, zum 3. Hauptsatz auch 3.3.3. Wichtig ist die Angabe des 2. Hauptsatzes in differentieller Form für reversible und irreversible Prozesse, und die Unterscheidung zwischen Energie (Zustandsgrösse) und Arbeit/Wärme (keine Zustandsgrössen). Während über die Änderung äusserer Parameter (z.B. Volumen) Arbeit am System geleistet werden kann, findet die Energieänderung durch Wärmeübertrag bei konstanten äusseren Parametern statt. In diesem Sinne ist δW im Gegensatz zu δQ *makroskopisch kontrollierbar*.

2. *Zwei Systeme, die sich zunächst bei unterschiedlichen Temperaturen befinden, werden in thermischen Kontakt gebracht. Die Gesamtentropie nimmt zu, und wird im Gleichgewichtszustand maximal. Folgern Sie daraus rechnerisch, daß (i) die Wärme stets vom wärmeren zum kälteren System fliesst, (ii) die Temperaturen der beiden Systeme im Gleichgewicht gleich sind, und (iii) die Wärmekapazitäten der beiden Systeme positiv sein müssen.*

Die Argumentation zu (i) finden Sie im Abschnitt 2.4 des Skripts, Gl. (2.27) und die relevanten Schritte zu (ii) und (iii) im Abschnitt 2.6, Gl.(2.35-2.36) und (2.40)-(2.42).

3. *Warum können die folgenden Ausdrücke¹ **nicht** die Entropie eines thermodynamischen Systems beschreiben?*

$$\text{a.) } S(E, V, N) = C_1(N^2 V E)^{1/3} \quad \text{b.) } S(E, V, N) = C_2(E^3/NV).$$

Der Ausdruck a.) ist wegen

¹ C_1 und C_2 sind positive Konstanten, die die Ausdrücke dimensionsmässig konsistent machen.

$$S(\lambda E, \lambda V, \lambda N) = S(E, V, N)$$

nicht homogen vom Grad 1. Der Ausdruck b.) ist wegen $\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \geq 0$ nicht konvex und darüberhinaus gilt wegen

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V,N} \sim E^2$$

dass für $T \rightarrow 0$ die Energie und damit die Entropie unendlich gross wird, im Widerspruch zum 3. Hauptsatz.

4. *Ein Gramm Wasser wird von Zimmertemperatur ($T_1 = 300$ K) auf eine höhere Temperatur T_2 erwärmt. Wie gross muss die Temperaturdifferenz $T_2 - T_1$ gewählt werden, damit die Zahl der Mikrozustände sich bei der Erwärmung verdoppelt?*

Hinweis: Die Wärmekapazität von einem Gramm Wasser ist $C_V \approx 3 \times 10^{23} k_B$.

Wir können in guter Näherung annehmen, dass C_V konstant ist. Die mit der Erwärmung verbundene Entropieänderung beträgt dann

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right),$$

Andererseits ist $\Delta S = k_B \ln \Omega_2 - k_B \ln \Omega_1 = k_B \ln \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) = k_B \ln 2$, so dass

$$\begin{aligned} k_B \ln 2 &= C_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} &= e^{\frac{k_B}{C_V} \ln 2}. \end{aligned}$$

Da der Exponent sehr klein ist, können wir $\exp\left(\frac{k_B}{C_V} \ln 2\right) \simeq 1 + \frac{k_B}{C_V} \ln 2$ in sehr guter Näherung entwickeln und erhalten $T_2 - T_1 = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)T_1 \simeq \frac{k_B}{C_V} \ln 2 T_1 = 7 \times 10^{-22}$ K.

5. *Wie hängt die Zahl der Mikrozustände eines klassischen idealen Gases von dem Volumen V und der Energie E ab? Benutzen Sie diese Abhängigkeiten, um die thermische und die kalorische Zustandsgleichung des idealen Gases abzuleiten.*

Unterteilt man das Volumen V in Zellen der Grösse v_0 , so stehen jedem Teilchen V/v_0 räumliche MiZ zur Verfügung; für N Teilchen ist somit $\Omega = (V/v_0)^N \sim V^N$, sodass

$$S = k_B \ln \Omega = k_B N \ln V + \text{Funktionen von } E, N.$$

Ableitung nach V liefert über die Beziehung $P/T = \partial S/\partial V$ die thermische Zustandsgleichung $PV = Nk_B T$.

Die Energieabhängigkeit ist von der Form $\Omega \sim E^{3N/2}$ d.h.

$$S = \frac{3}{2}k_B N \ln E + \text{Funktionen von } V, N.$$

Mit der Beziehung $\frac{1}{T} = \partial S/\partial E$ folgt die kalorische Zustandsgleichung $E = \frac{3}{2}Nk_B T$.

6. Die freie Energie des klassischen idealen Gases ist gegeben durch

$$F(T, V, N) = -k_B T N \left[\ln \left(\frac{V}{N \lambda_{\text{th}}^3} \right) + 1 \right]$$

mit $\lambda_{\text{th}} = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2}$. Leiten Sie daraus Ausdrücke für die Entropie $S(T, V, N)$ und das chemische Potential $\mu(T, V, N)$ her, und skizzieren Sie den Verlauf von S als Funktion der Temperatur. Bei welcher Temperatur wird die klassische Beschreibung offensichtlich unsinnig?

Man benutzt die Beziehungen [Gl.(4.28) im Skript]

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N}, \quad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T, V}.$$

Ableitung nach T ergibt für die Entropie

$$S = k_B N \left[\ln \left(\frac{V}{N \lambda_{\text{th}}^3} \right) + \frac{5}{2} \right]$$

Für das chemische Potential erhalten wir

$$\mu = -k_B T \ln \left(\frac{V}{N \lambda_{\text{th}}^3} \right),$$

Wegen $\lambda_{\text{th}} \sim T^{-1/2}$ ist die Temperaturabhängigkeit der Entropie von der Form

$$S = \frac{3}{2}k_B N \ln T + \text{Funktion von } V, N.$$

Das heisst, die Entropie strebt für $T \rightarrow \infty$ nach ∞ und für $T \rightarrow 0$ nach $-\infty$. Die Nullstelle liegt bei $T \simeq 0.2 \times T_c$ wobei wir T_c durch $\lambda_{\text{th}}(T = T_c)^3 = V/N$ definiert haben. Das heisst, der Vorzeichenwechsel liegt in der Nähe der Temperatur, bei der der Teilchenabstand der thermischen de Broglie-Wellenlänge vergleichbar wird. Das Verhalten für $T < T_c$ ist natürlich unphysikalisch, denn für $T < T_c$ werden Quanteneffekte wichtig.

7. Einem quantenmechanischen Zwei-Niveau-System stehen nur zwei Zustände mit Energien E_1 und $E_2 > E_1$ zur Verfügung². Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme des

²Ein Beispiel ist ein Spin mit zwei Einstellmöglichkeiten in einem Magnetfeld.

Systems, und berechnen Sie daraus die mittlere Energie als Funktion der Temperatur. Diskutieren Sie das Verhalten bei hohen und niedrigen Temperaturen.

Aus der Zustandssumme

$$Z = e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}$$

ergibt sich die mittlere Energie durch

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{E_1 e^{-\beta E_1} + E_2 e^{-\beta E_2}}{e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2}} = \frac{E_1 + E_2 e^{-\beta(E_2-E_1)}}{1 + e^{-\beta(E_2-E_1)}}.$$

Wir beschränken uns auf positive Temperaturen. Für hohe Temperaturen ($\beta \rightarrow 0$) sind die Exponentialfunktionen nahezu Eins und die Energie geht gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$. Für niedrige Temperaturen ($\beta \rightarrow \infty$) verschwinden die Exponentialfunktionen wegen $E_2 > E_1$ und die Energie strebt gegen E_1 .

8. *Diskutieren und skizzieren Sie den Verlauf der Wärmekapazität als Funktion der Temperatur, von $T = 0$ bis zu hohen Temperaturen, für das ideale Fermi-Gas, das ideale Bose-Gas, und das Photonengas.*

Für $T \rightarrow 0$ verschwinden die Wärmekapazitäten wie $C_V \sim T$ (Fermi-Gas), $C_V \sim T^{3/2}$ (Bose-Gas) bzw. $C_V \sim T^3$ (Photonengas). Bei hohen Temperaturen verhalten sich Fermi- und Bose-Gas wie klassische Gase, sodass $C_V \rightarrow (3/2)k_B N$ unabhängig von T wird. Beim Fermi-Gas ist der Übergang zum klassischen Verhalten glatt, beim Bose-Gas hat C_V bei $T = T_B$ eine Spitze. Da die Photonen masselose, relativistische Teilchen sind, gibt es beim Photonengas keine charakteristische Temperatur, die den Übergang zum klassischen Verhalten markiert; vielmehr gilt $C_V \sim T^3$ für alle T .