

Nachklausur zur Vorlesung "Theoretische Physik in zwei Semestern II"

Musterlösungen

1. *Welche experimentellen Tatsachen weisen auf den Teilchencharakter des Lichts hin, und woher weiß man, dass massive Teilchen (wie z.B. Elektronen) auch Wellencharakter haben?*

Beim *Photoeffekt*, bei dem durch Lichteinfall aus einem Metall Elektronen herausgelöst werden, ist die Anzahl der ausgelösten Elektronen zur Intensität des Lichtes und deren Energie zur Lichtfrequenz proportional. Im klassischen Wellenbild ist die Energie einer Welle zu deren Intensität proportional, weshalb sich der Photoeffekt im Wellenbild nicht erklären lässt. Nimmt man dagegen an, dass Licht aus Teilchen der Energie $\hbar\omega$ besteht, ergeben sich die Zusammenhänge zwischen Intensität (= Anzahl der Lichtteilchen) und Anzahl der Elektronen und zwischen Frequenz und Elektronenenergie auf natürliche Weise. Darüber hinaus beobachtet man, dass unterhalb einer bestimmten Lichtfrequenz keine Elektronen ausgelöst werden. Beim kontinuierlichen Energieübertrag durch Wellen wäre das nicht zu erwarten. Im Teilchenbild bedeutet es einfach, dass die Energie eines Photons nicht ausreicht, die Auslösearbeit zu leisten.

Beim *Compton-Effekt* wird Röntgenstrahlung an einem Elektronen gestreut, wobei sich Frequenz der Strahlung und der Impuls des Elektrons ändern. Nimmt man wiederum den Teilchencharakter des Lichts an und ordnet einem Photon den Impuls $\hbar\vec{k}$ zu, lässt sich dieser Effekt als Stoßvorgang deuten.

Der Wellencharakter eines Elektrons lässt sich direkt aus der Interferenzbildung beim *Doppelspalt-Experiment* folgern. Bei klassischen Teilchenstrahlen addieren sich die Intensitäten, bei Wellen die Amplituden. Interferenz ist ein typisches Wellenphänomen.

2. *Erläutern Sie die folgenden thermodynamischen Begriffe:*
 - a.) *Extensive und intensive Zustandsgrößen: Welche Beispiele sind Ihnen bekannt? Welche Bedeutung haben die beiden Typen von Größen bei thermodynamischen Prozessen?*
 - b.) *Arbeit, Wärme und innere Energie*
 - c.) *Irreversible Prozesse: Beispiele? Worin liegt ihre mikroskopische Ursache?*

Die Antworten finden Sie in den Abschnitten 2.1, 2.2 und 2.4 des Skripts. Der mikroskopische Ursprung der Irreversibilität ist in 3.3.2 dargestellt. Beispiele für irreversible Prozesse sind z.B. adiabatisches Rühren, freie Expansion eines Gases und Wärmeaustausch zweier Körper im thermischen Kontakt.

3. Welche Aussage macht der klassische Gleichverteilungssatz? Wenden Sie ihn an auf ein Gas aus zweiatomigen starren Molekülen, deren mechanische Energie durch den Ausdruck

$$\mathcal{E} = \frac{|\vec{P}|^2}{2M} + \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I}$$

gegeben ist. Hier bezeichnet \vec{P} den Schwerpunktsimpuls, M die Masse des Moleküls, $L_{x,y}$ die Drehimpulskomponenten bezüglich der x - und y -Achsen, und I das entsprechende Trägheitsmoment; die Molekülachse ist entlang der z -Achse gewählt. Wie gross ist die Wärmekapazität eines idealen Gases von N solchen Molekülen?

Klassischer Gleichverteilungssatz: Jeder klassische Freiheitsgrad, der quadratisch in die mechanische Energie eingeht, trägt $\frac{1}{2}k_B T$ zur inneren Energie des Systems bei.

Im angegebenen Beispiel gehen P_x, P_y, P_z, L_x und L_y quadratisch in die mechanische Energie ein, so dass die innere Energie pro Teilchen $\frac{5}{2}k_B T$ beträgt. Aus $E = \frac{5}{2}Nk_B T$ folgt $C_V = \partial E / \partial T = \frac{5}{2}Nk_B$.

4. Worin unterscheiden sich Fermionen und Bosonen? Gehen Sie aus von der quantenmechanischen Definition dieser Begriffe, und erläutern Sie, welche Konsequenzen sich daraus für die thermodynamischen Eigenschaften der idealen Quantengase bei tiefen Temperaturen ergeben. Geben Sie Beispiele für beide Sorten von Teilchen an.

Bosonische Vielteilchenwellenfunktionen sind symmetrisch bezüglich Vertauschung zweier Teilchen. Bei zwei Bosonen in einer Dimension heisst das zum Beispiel $\Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1)$. Die fermionische Wellenfunktion ist dagegen antisymmetrisch bezüglich Vertauschung, d.h. $\Psi(x_1, x_2) = -\Psi(x_2, x_1)$. Als direkte Folge davon gilt für Fermionen das Pauli-Prinzip, welches verbietet, dass sich zwei Fermionen im gleichen Quantenzustand befinden. Dem gegenüber können sich beliebig viele Bosonen im gleichen Zustand befinden. Dies führt zum Begriff der *statistischen Anziehung* (bei Bosonen), bzw. *Abstossung* (bei Fermionen). Ein weiterer wichtiger Unterschied zeigt sich beim Spin, der für Bosonen nur ganzzahlige, bei Fermionen dagegen nur halbzahlige Werte annehmen kann.

Thermodynamische Auswirkungen für ideale Quantengase zeigen sich bei niedrigen Temperaturen. Am absoluten Nullpunkt der Temperatur besetzen Fermionen die Zustände der Fermikugel. Wegen der statistischen Abstossung herrscht auch hier ein endlicher Druck. Bei Bosonen befinden sich bei $T = 0$ alle Gasteilchen in *einem* Zustand, dem Grundzustand. Tatsächlich sammelt sich bei der *Bose-Einstein-Kondensation* auch schon für endliche Temperaturen unterhalb der *Bose-Temperatur* T_B ein makroskopischer Teil der

Teilchen in diesem Zustand. In diesem Bereich ist der Druck *unabhängig vom Volumen*. Ein weiterer charakteristischer Unterschied zeigt sich am Verhalten der Wärmekapazität bei niedrigen Temperaturen, die bei Fermionen *linear* mit der Temperatur geht und bei Bosonen einem $T^{3/2}$ -Gesetz folgt. Beide unterscheiden sich hierin vom klassischen Gas, bei dem C_V konstant ist.

Beispiele für Fermionen sind Elektronen, Protonen und Neutronen, Beispiele für Bosonen sind Photonen und ^4He .

B. Rechenaufgaben

1. Ein quantenmechanisches Teilchen fällt von links (also von $x = -\infty$ her) auf eine abfallende Potentialstufe. Das Potential $V(x)$ hat für $x < 0$ den Wert $V(x) = V_0 > 0$ und für $x > 0$ den Wert $V(x) = 0$. Die Teilchenenergie sei $E > V_0$. Geben Sie die Form der Wellenfunktion für $x < 0$ und $x > 0$ an. Definieren Sie den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten. Berechnen Sie diese Größen und diskutieren Sie ihr Verhalten als Funktion der Teilchenenergie. Wie würde sich ein klassisches Teilchen in dieser Situation verhalten?

Da das Potential stückweise konstant ist, lässt sich die Lösung links und rechts des Ursprungs jeweils als Überlagerung ebener Wellen ansetzen. Die Koeffizienten werden durch die Stetigkeit von Wellenfunktion und deren Ableitung bestimmt.

$$\begin{aligned}\Psi_{x<0}(x) &= e^{ikx} + re^{-ikx} && \text{ein- und auslaufende Welle} \\ \Psi_{x>0}(x) &= te^{ik'x} && \text{nur auslaufende Welle}\end{aligned}$$

mit $k = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2}$ und $k' = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung erfordern

$$\begin{aligned}\Psi_{x<0}(0) &= \Psi_{x>0}(0) \\ \Rightarrow 1 + r &= t \\ \frac{\partial \Psi_{x<0}}{\partial x}(0) &= \frac{\partial \Psi_{x>0}}{\partial x}(0) \\ \Rightarrow k - rk &= tk'\end{aligned}$$

und die beiden Gleichungen für r und t lassen sich nach

$$\begin{aligned}r &= \frac{k - k'}{k + k'} \\ t &= \frac{2k}{k + k'}\end{aligned}$$

auflösen. Der Reflexionskoeffizient ist das Verhältnis der Wahrscheinlichkeitsströme von reflektierter und einlaufender Welle, der Transmissionskoeffizient entspricht dem Verhältnis von transmittiertem und einlaufendem Strom. Der Wahrscheinlichkeitsstrom einer ebenen

Welle ist das Betragsquadrat der Amplitude multipliziert mit dem zugehörigen Wellenzahlvektor. Damit ergibt sich $R = |r|^2$. und $T = |t|^2 \frac{k'}{k}$. Wegen $E > V_0 > 0$ sind k und k' und damit r und t reell und damit

$$R = \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} + 1} \right)^2$$

$$T = \frac{4\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}}{\left(\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} + 1 \right)^2}$$

Für $E = V_0$ ist $R = 1$ und $T = 0$, das heisst das Teilchen wird immer reflektiert. Für höhere Energien steigt der Transmissionskoeffizient an, der Reflektionskoeffizient wird kleiner und strebt für $E \rightarrow \infty$ schließlich gegen Null während T Eins wird. Das heisst für sehr hohe Energien ist die Transmissionswahrscheinlichkeit Eins. Klassisch würde ein Teilchen die Potentialstufe natürlich immer passieren. Wie üblich entspricht also der Hochenergielimes dem klassischen Fall.

2. Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}]$ zwischen dem Ortsoperator \hat{x} und der zugehörigen Komponente \hat{p} des Impulsoperators. Welcher allgemeine Zusammenhang besteht zwischen dem Kommutator zweier quantenmechanischer Grössen und deren Unschärfen? Benutzen Sie diesen Zusammenhang, um aus $[\hat{x}, \hat{p}]$ die Unschärferelation zwischen Ort und Impuls zu folgern.

Der Ortsoperator \hat{x} ist die Multiplikation mit x , während der Impulsoperator die Ableitung $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}]\Psi(x) &= x(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})\Psi(x) - (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})x\Psi(x) \\ &= -i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) - (-i\hbar \Psi(x) - i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x)) \\ &= i\hbar \Psi(x) \end{aligned}$$

also $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

Für die Unschärfe zweier quantenmechanischen Grössen \hat{A} und \hat{B} gilt allgemein

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq -\frac{1}{4} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2$$

das heisst in unserem Fall $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

3. Ein Gramm Wasser wird von $T_1 = 300$ K um drei Grad auf $T_2 = 303$ K erwärmt. Um welchen Faktor vergrössert sich dabei die Zahl der Mikrozustände?
Hinweis: Die Wärmekapazität von einem Gramm Wasser ist $C_V \approx 3 \times 10^{23} k_B$, und es gilt

$\ln(1+x) \approx x$ für $x \ll 1$.

Wir können in guter Näherung annehmen, dass C_V konstant ist. Die mit der Erwärmung verbundene Entropieänderung beträgt dann

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \\ &= C_V \ln \left(\frac{303K}{300K} \right) = C_V \ln \left(1 + \frac{1}{100} \right) \simeq C_V \frac{1}{100},\end{aligned}$$

Andererseits ist $\Delta S = k_B \ln \Omega_2 - k_B \ln \Omega_1 = k_B \ln \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)$, so dass

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = e^{\frac{\Delta S}{k_B}} = e^{3 \times 10^{23} \frac{1}{100}} = e^{3 \times 10^{21}}$$

4. Die Entropie des idealen klassischen Gases ist gegeben durch den bekannten Ausdruck

$$S(E, V, N) = k_B N \left[\ln \left(\frac{V}{N} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{E}{N} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m}{3\pi\hbar^2} \right) + \frac{5}{2} \right]. \quad (1)$$

a.) Es ist leicht nachzurechnen, dass

$$\begin{aligned}S(\lambda E, \lambda V, \lambda N) &= k_B \lambda N \left[\ln \left(\frac{\lambda V}{\lambda N} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{\lambda E}{\lambda N} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) + \frac{5}{2} \right] \\ &= k_B \lambda N \left[\ln \left(\frac{V}{N} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{E}{N} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) + \frac{5}{2} \right] = \lambda S(E, V, N)\end{aligned}$$

b.) Wir benutzen die Beziehungen Gl. (2.31) im Skript und erhalten daraus direkt

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial V} &= \frac{k_B N}{V} = \frac{P}{T} \\ \frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{3}{2} \frac{k_B N}{E} = \frac{1}{T}\end{aligned}$$