Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 5

WS 2013/14

Abgabe: Dienstag, den 19.11.2013 vor 10 Uhr in den Briefkästen vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 21.11.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2013-KTP2.html

Fragestunde: Wir werden diesen Donnerstag eine Fragestunde anbieten, in der Fragen bezüglich des Übungsblattes gestellt werden können. Die Fragestunde findet **am 14.11. direkt nach der Vorlesung** im Foyer des Physikgebäudes statt.

17. Fouriertransformation *(4 Punkte)*

Die Fouriertransformation $\hat{f}(k)$ einer Funktion $f(x)$ ist definiert durch

$$\hat{f}(k) = \int dx f(x) e^{-ikx}$$

mit der Rücktransformation

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk \hat{f}(k) e^{ikx} .$$

a) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation die Differentiation algebraisiert, d.h. dass für eine absolut integrierbare Funktion, deren erste Ableitung auch stetig und integrierbar ist, die Beziehung

$$\widehat{(f')}(k) = ik\hat{f}(k)$$

gilt.

b) Sind zwei Funktionen f, g absolut integrierbar, so gilt dies auch für die Funktion $t \mapsto f(t)\, g(x-t)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t) dt$$

ist dann für fast alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und heißt Faltung von f mit g.
Beweisen Sie für absolut integrierbare Funktionen f, g den Faltungssatz

$$\widehat{f * g}\,(k) = \hat{f}(k)\, \hat{g}(k).$$

18. Bestimmung der Greenfunktion durch zweifache Fouriertransformation - 1. Teil

(6 Punkte)

In der Vorlesung wurde Ihnen die Lösung der Helmholtz-Gleichung präsentiert. Sie sollen diese nun durch explizites Nachrechnen finden. Beachten Sie, dass diese Vorgehensweise nicht streng mathematisch ist. Behandeln Sie die Distributionen im üblichen Physikersinn.

a) Beginnen Sie, indem Sie die folgende partielle Differentialgleichung sowohl zeitlich, als auch räumlich Fourier-transformieren:

$$\Box G(\mathbf{r}, t) = -\delta(\mathbf{r})\,\delta(t),$$

beachten Sie, dass die Fourier-Transformation Ableitungen algebraisiert.

b) Nachdem Sie geeignet umgeformt haben, erhalten Sie

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Um nun $G(\mathbf{r}, t)$ zu bestimmen, müssen Sie diese Gleichung nun wieder in den Ortsraum transformieren.

$$G(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\,\omega}{2\pi} \frac{1}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

Konzentrieren Sie sich auf die k-Integration und definieren Sie:

$$G_\omega(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Wählen Sie für die Volumenintegration Kugelkoordinaten r, ϕ, θ und machen Sie sich klar, dass Sie θ so wählen können, dass $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k\,r\,\cos(\theta)$.
Was geschieht mit der ϕ-Integration?

c) Berechnen Sie nun das θ-Integral:

$$G_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\,k \frac{k^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \int_0^\pi d\,\theta \sin(\theta)\, \mathrm{e}^{ikr\cos(\theta)}$$

19. Bestimmung der Greenfunktion durch zweifache Fouriertransformation - 2. Teil

(6 Punkte)

Wenn Sie Aufgabe 18 korrekt gelöst haben, erhalten Sie

$$G_\omega(\mathbf{r}) = \frac{i}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} d\,k \frac{k\,\mathrm{e}^{-ikr}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

a) Für die k-Integration müssen Sie zunächst den quadratischen Nenner durch Partialbruchzerlegung linearisieren.

b) Bringen Sie nun das Integral auf geeignete Form und verwenden Sie $\int dx\,\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x} = -i\pi$.

c) Zuletzt müssen Sie auch den Frequenzteil zurücktransformieren und können die Greenfunktion in der folgenden Form schreiben:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \int d\omega \left(G^{+}(\mathbf{r}, \omega) + G^{-}(\mathbf{r}, \omega) \right) \ .$$

Bestimmen Sie $G^{\pm}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \, G^{\pm}(\mathbf{r}, \omega)$ und erklären Sie die physikalische Bedeutung dieser zwei Beiträge.