

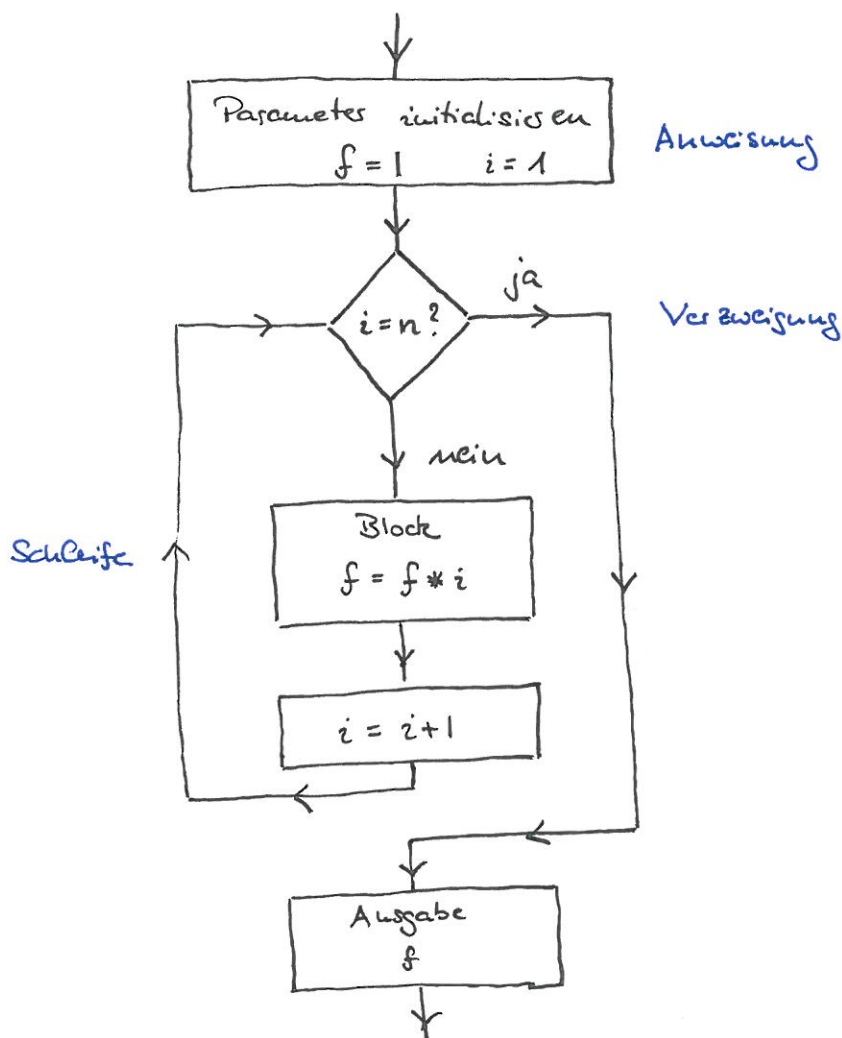
Algorithmen

Ein Algorithmus ist eine aus endlich vielen Schritten bestehende, eindeutige und ausführbare Handlungs-vorschrift zur Lösung eines Problems oder einer Klasse von Problemen.

→ Aufträge gehen auf den iranischen Gelehrten Muhammed al-Chwarizmi zurück, der ca. 800 n. Chr. das Lehrbuch "Über das Rechnen mit indischen Ziffern" verfasst hat.

Die Hauptstrukturen eines Algorithmus sind Anweisungen, Schleifen und Verzweigungen.

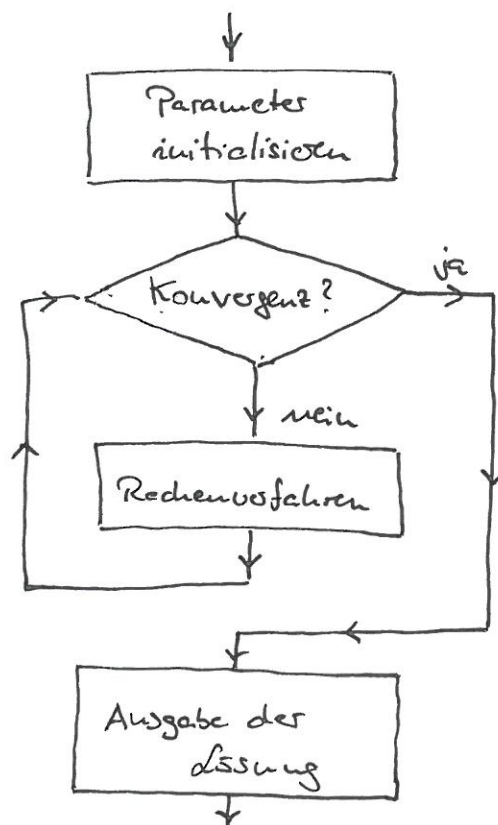
Beispiel: Die Berechnung der Fakultät $f(n) = n!$



Ein iteratives Verfahren ist eine Methode, sich der exakten Lösung eines Rechenproblems schrittweise anzunähern. Sie besteht in der wiederholten Anwendung desselben Rechenverfahrens, wobei die Ergebnisse eines Schrittes als Anfangswert des jeweils nächsten Schrittes dienen.

Die Folge der Ergebnisse muß konvergieren. Ist die Differenz zum vorangegangenen Schritt kleiner als der akzeptierte Fehler, dann ist das Ergebnis hinreichend genau bestimmt, und das Verfahren beendet.

Schematisch:



- Beispiele aus den Übungen:
- 1) Koordinatentransformation $\rightarrow$ Gumowski-Mira Attraktor
 - 2) Update des zellulären Automaten

Nullstellen

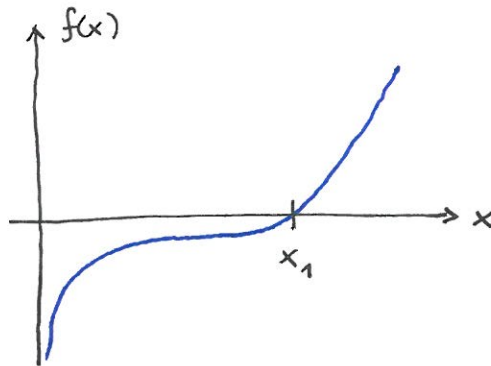
Gegeben sei eine Funktion $f(x)$.

Gesucht seien die Nullstellen x_i mit $f(x_i) = 0 \quad i=1,2,\dots,N$

Beispiele:

- $f(x) = x^2 + x - 2 = (x-1) \cdot (x+2) \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \\ &\text{analytisch lösbar} \end{aligned}$

- $f(x) = e^x \ln x - x^2 \quad \text{für } x > 0$



$f(x) = 0 \rightarrow$ transzendente Gleichung

läßt sich nicht nach x auflösen

es gibt aber genau eine Nullstelle im Intervall $]0, \infty[$

$$x_1 \approx 1.7 \dots$$

- $f(x) = x^5 - 2x^2 - 3$

$f(x) = 0 \rightarrow$ algebraische Gleichung

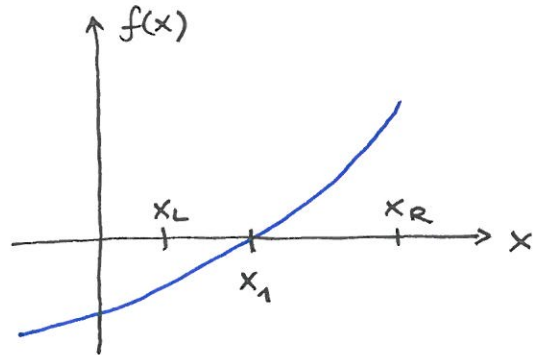
läßt sich aber ebenfalls nicht nach x auflösen

es gibt aber genau eine Nullstelle für $x_1 \approx 1.5 \dots$

Numerisches Verfahren 1 - bisection

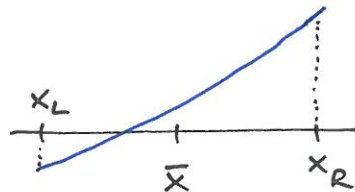
-4-

Annahme: Wir wissen bereits, daß im Intervall $[x_L, x_R]$ genau eine (einfache) Nullstelle der Funktion liegt, und daß weiterhin gelte: $f(x_L) < 0$ $f(x_R) > 0$ (oder vice versa).



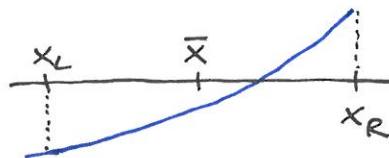
Rechenverfahren: Berechne $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_L + x_R)$ und berechne $f(\bar{x})$.
Unterscheide:

i) $f(\bar{x}) > 0$



$$\begin{array}{l} x_L \rightarrow x_L \\ x_R \rightarrow \bar{x} \end{array}$$

ii) $f(\bar{x}) < 0$

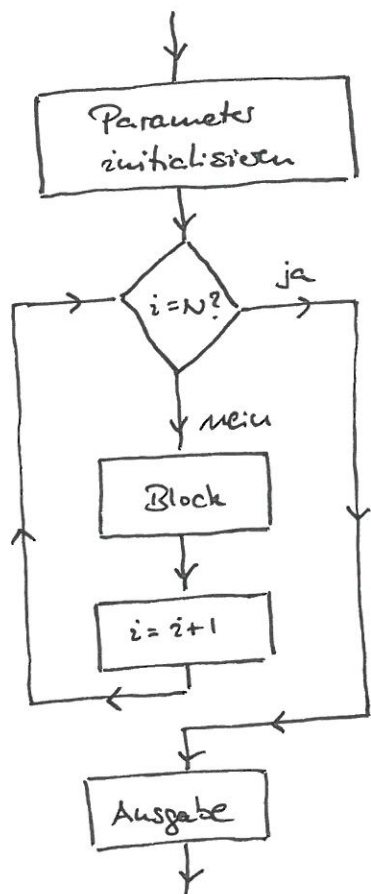


$$\begin{array}{l} x_L \rightarrow \bar{x} \\ x_R \rightarrow x_R \end{array}$$

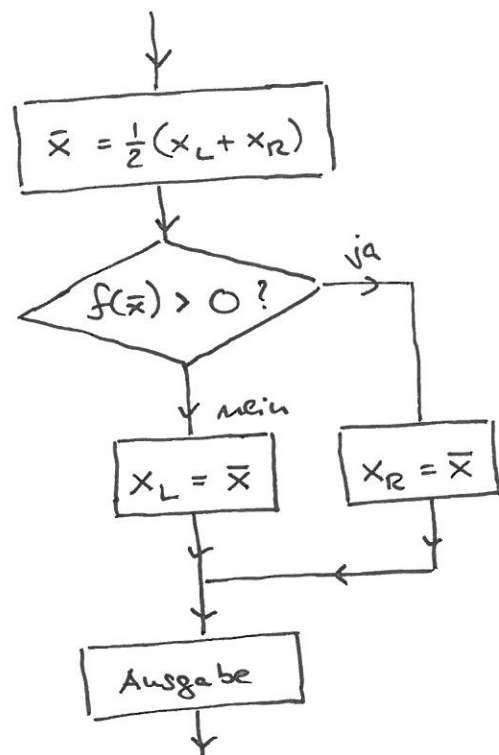
Iteriere diesen Rechenschritt N -mal.

Die Approximation der Nullstelle ist dann

$$\text{Nullstelle } x_1 \approx \bar{x}.$$



Block:

Konvergenz des Verfahrens

Numerische Approximation für den Wert der Nullstelle nach i Iterationen:

$$x_1(i) = \bar{x}(i) \pm \underbrace{\frac{1}{2} \Delta x(i)}_{\text{Fehler}}$$

$$\Delta x(i) = x_R(i) - x_L(i)$$

Startwert für den Fehler:

$$\Delta x(0) = x_R - x_L$$

Es gilt:

$$\Delta x(i) = \Delta x(0) \cdot 2^{-i}$$

$$\rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta x(i) = 0$$

$$\text{und } \lim_{i \rightarrow \infty} x_1(i) = x_1.$$

Unter den genannten Voraussetzungen konvergiert das Verfahren immer!

Numerisches Verfahren 2 - Newton-Verfahren

-6-

auch Newton-Raphson Verfahren

Startwert x_0

→ Taylor-Entwicklung der Funktion
um x_0

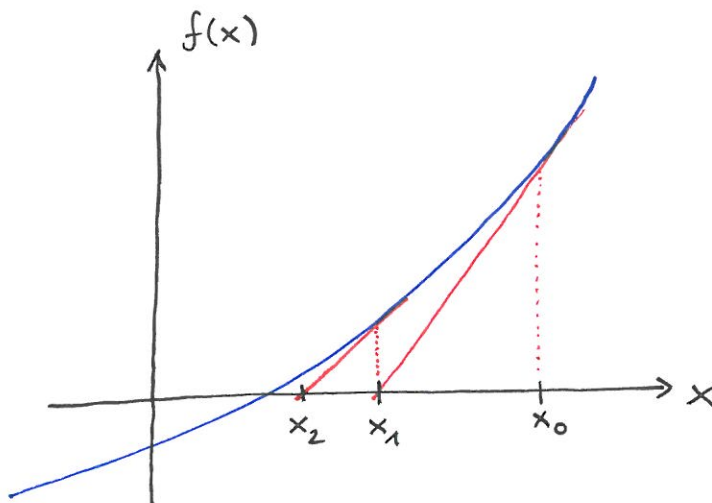
$$f(x_0 + \delta_0) \approx f(x_0) + \delta_0 \cdot f'(x_0) + \dots \quad O(\delta_0^2)$$

→ Bestimme δ_0 aus $f(x_0 + \delta_0) = 0$: $f(x_0) + \delta_0 \cdot f'(x_0) = 0$

$$\rightarrow \delta_0 = - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

→ Bestimme sukzessive

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (*)$$



- Wenn die Ableitung $f'(x)$ analytisch nicht bekannt ist, lässt sich diese Annähern als

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

→ Sekanten-Methode

Konvergenz des Verfahrens

Betrachten wir dazu nochmals die Taylor-Entwicklung

$$\underbrace{f(x_0 + \delta_0)}_{= f(x_1)} \approx \underbrace{f(x_0) + \delta_0 f'(x_0)}_{= 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \delta_0^2 f''(x_0)}_{\text{Näherung für } f(x_1)} + \dots \quad O(\delta_0^3).$$

Taylor-Entwicklung für die Ableitung

$$\underbrace{f'(x_0 + \delta_0)}_{= f'(x_1)} \approx f'(x_0) + \delta_0 f''(x_0) + \dots$$

Iteration des Newton-Schrittes (*):

$$\delta_1 = - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx - \frac{1}{2} \delta_0^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{f'(x_0) + \delta_0 f''(x_0)}$$

$$\rightarrow \delta_1 \approx - \frac{1}{2} \delta_0^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{für kleine } \delta_0$$

Allgemein

$$\delta_{n+1} \approx - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}}_{\rightarrow \text{const} = c} \cdot \delta_n^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\delta_{n+1} = c \cdot \delta_n^2}$$

Vergleich zum ersten Verfahren:

$$\text{bisection} \rightarrow \frac{\Delta x(i+1)}{\Delta x(i)} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \text{Newton} \rightarrow \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = c \cdot \delta_n$$

$\Rightarrow$ wesentlich schnellere Konvergenz des Newton-Verfahrens (falls δ_n klein).

Nachteil des Newton - Verfahrens: keine garantierte Konvergenz ⁻⁸⁻

Beispiele:

