Lösung der Maxwell-Gleichungen – Yee-Vischen Algorithmus

Nachdem wir mit der Relaxationsmethode ein Verfahren kennengelernt haben, mit dem wir die Poisson-Gleichung der Elektrostatik lösen können, wollen wir nun noch einen Algorithmus kennenlernen, der es uns erlaubt, die Maxwell-Gleichung in der Anwesenheit vieler bewegter Ladungen zu lösen.

Erinnern wir uns zunächst an die Maxwell-Gleichungen:

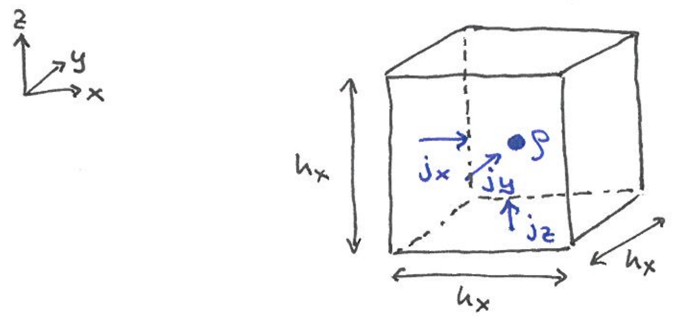
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \qquad \text{(Faraday)}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - 4\pi \underbrace{\vec{J}}_{\text{Ströme durch bewegte Ladungen}} \qquad \text{(Ampère - Maxwell)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)}$$

Der Yee-Vischen Algorithmus

Die numerische Lösung dieser Gleichungen startet wiederum mit einer Diskretisierung des Raumes in Volumeneinheiten der Kantenlänge h_x:



Mit $\rho(\vec{r})$ bezeichnen wir die Ladungsdichte innerhalb eines solchen Volumenblocks.

Als nächstes müssen wir die Ströme definieren, welche zwischen diesen Volumenblöcken fließen. Die natürlichste Art und Weise, dies zu tun, ist die Ströme senkrecht zu den Randflächen des Volumenblocks zu definieren.

Es sei $j_x(\vec{r})$ der Fluß, der von links in den Block fließt,
$j_y(\vec{r})$ der Fluß, der von vorne in den Block fließt
und $j_z(\vec{r})$ der Fluß, der von unten in den Block fließt.

Damit können wir die Kontinuitätsgleichung diskretisieren über eine halb-Schritt Methode

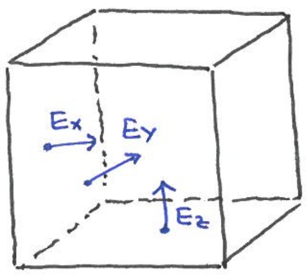
$$\rho\left(\vec{r}, t + \frac{h_t}{2}\right) = \rho\left(\vec{r}, t - \frac{h_t}{2}\right) - \frac{h_t}{h_x} \sum_{f=1}^{6} j_f(\vec{r}, t)$$

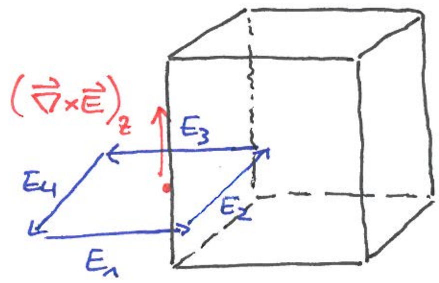
mit den Flüßen j_f durch die 6 Randflächen

$$j_1(\vec{r},t) = -j_x(\vec{r},t)$$
$$j_2(\vec{r},t) = -j_y(\vec{r},t)$$
$$j_3(\vec{r},t) = -j_z(\vec{r},t)$$
$$j_4(\vec{r},t) = j_x(\vec{r} + h_x\hat{e}_x, t)$$
$$j_5(\vec{r},t) = j_y(\vec{r} + h_x\hat{e}_y, t)$$
$$j_6(\vec{r},t) = j_z(\vec{r} + h_x\hat{e}_z, t)$$

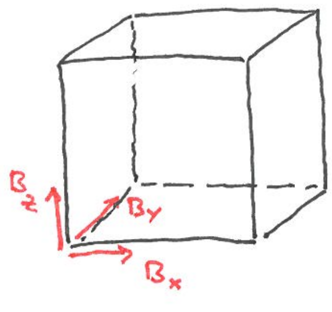
Bei der Implementierung muß dabei sorgfältig auf die einzelnen Vorzeichen geachtet werden.

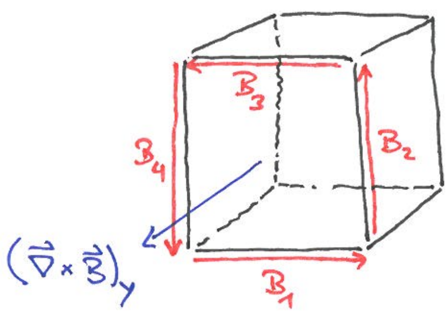
Als nächstes machen wir uns daran, die Ampère-Maxwell Gleichung für das elektrische Feld umzusetzen. Auf der rechten Seite dieser Gleichung gibt es einen Term proportional zu den eben definierten Flüssen – es ist daher natürlich, auch das elektrische Feld senkrecht zu den Randflächen zu definieren und es ebenfalls um einen halben Zeitschritt zu versetzen:





Die Rotation des elektrischen Feldes ist dann natürlicherweise auf den Kanten des Blocks definiert. Entsprechend definieren wir das Magnetfeld auch auf den Kanten des Blocks





und entsprechend die Rotation des Magnetfelds.

Damit erhalten wir die diskretisierten Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{E}\left(\vec{r}, t + \frac{h_t}{2}\right) = \vec{E}\left(\vec{r}, t - \frac{h_t}{2}\right) + \frac{h_t}{h_x}\left[c \cdot \sum_{e=1}^{4} \vec{B}_e(\vec{r}, t) - 4\pi \vec{j}\left(\vec{r}, t + \frac{h_t}{2}\right)\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t + h_t) = \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{h_t}{h_x}\left[c \cdot \sum_{f=1}^{4} \vec{E}_f\left(\vec{r}, t + \frac{h_t}{2}\right)\right]$$

Diese lassen sich stabil integrieren für $\boxed{h_t < \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot h_x}$