

Aufgrund dieser Analogie können wir für die kritischen Exponenten ansetzen

$$\Delta M = M_+ - M_- \sim (T_c - T)^\beta \quad T \rightarrow T_c$$

$$M(h, T = T_c) \sim |h|^{1/\delta}, \quad |h| \rightarrow 0$$

Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial M}{\partial h} \sim |T - T_c|^{-\gamma}, \quad T \rightarrow T_c$
 entspricht der Kompressibilität $\alpha_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p}$

spezifische Wärme $C_v \sim |T - T_c|^{-\alpha}, \quad T \rightarrow T_c$

Welche Werte nehmen die kritischen Exponenten für den Ferromagneten an? Eine Möglichkeit wäre, daß die kritischen Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tatsächlich dieselben Werte wie für den Flüssig-Gas-Übergang annehmen. Dies ist tatsächlich, wie wir im folgenden noch diskutieren werden, der Fall für bestimmte uniaxiale Ferromagnete (deren magnetische Momente eine Vorzugsorientierung besitzen $\rightarrow$ Ising Spins).

Diese Übereinstimmung der kritischen Exponenten bezeichnet man als Universalität.

Mikroskopischer Ursprung

Die mikroskopische Ursache für den Ferromagnetismus sind Wechselwirkungen zwischen den magnetischen Momenten. Um den Ursprung dieser Wechselwirkungen zu verstehen, sollten wir zunächst klären, wie die magnetischen Momente überhaupt entstehen.

Dazu müssen wir einen Ausflug in die relativistische Quantenmechanik machen. Dort zeigt sich (bei der Lösung der Dirac-Gleichung, einer relativistischen Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung), daß Elektronen neben ihrer elektrischen Ladung ein magnetisches Dipolmoment, einen sogenannten Spin, besitzen.

In Materialien mit vollständig gefüllten Elektronenschalen summieren sich diese magnetischen Momente der Elektronen zu Null, da die Spins $\uparrow, \downarrow$ immer paarweise auftreten ($\rightarrow$ Pauli Prinzip); es tritt kein Magnetismus auf. In Materialien mit teilweise gefüllten Elektronenschalen hingegen können sich magnetische Phänomene wie Paramagnetismus und Ferromagnetismus ausbilden.

Die dominante Wechselwirkung zwischen den magnetischen Dipolmomenten ungepaarter Elektronen ist nicht etwa eine Dipol-Dipol-Wechselwirkung sondern die Coulombwechselwirkung im Zusammenspiel mit der Austauschsymmetrie. Betrachte dazu zunächst die kollektiven Zustände zweier Spins

$$|\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle \quad \begin{array}{l} \text{symmetrischer } S=1 \text{ Zustand} \\ \rightarrow \text{Ortswellenfunktion antisymmetrisch} \end{array}$$

$S^z=1 \qquad S^z=0 \qquad S^z=-1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \begin{array}{l} \text{antisymmetrischer } S=0 \text{ Zustand} \\ \rightarrow \text{Ortswellenfunktion symmetrisch} \end{array}$$

Mit den Ortswellenfunktionen $\phi_a(r_1)$ und $\phi_b(r_2)$ der beiden Elektronen ergibt sich eine Gesamtwellenfunktion im Ortsraum von

$$\psi(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_a(r_1) \phi_b(r_2) \overset{\downarrow S=0}{\pm} \phi_a(r_2) \phi_b(r_1))$$

$\uparrow S=1$

Für die Coulomb-Energie ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \langle \psi | \frac{e^2}{r_{12}} | \psi \rangle &= \underbrace{\int d^3r_1 \int d^3r_2 |\phi_a(r_1)|^2 \cdot |\phi_b(r_2)|^2 \cdot \frac{e^2}{r_{12}}}_{I} \\ &\quad \pm \underbrace{\int d^3r_1 \int d^3r_2 \phi_a(r_1) \phi_b(r_1) \phi_a(r_2) \phi_b(r_2) \cdot \frac{e^2}{r_{12}}}_{J} \end{aligned}$$

Wenn das zweite Integral positiv ist, haben die $S=1$ Tripletzustände eine um $2J$ geringere Energie als $S=0$ Singletzustände.

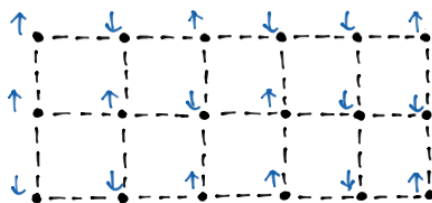
Ising - Modell

Das einfachste, aber sehr "reiche" Modell des Ferromagnetismus ist 1923 von Ernst Ising im Rahmen seiner Dissertation formuliert worden. Er betrachtet hierfür einen uniaxialen Ferromagneten, d.h. ein System mit einer ausgewiesenen Vorzugsrichtung - die elementaren Spins können sich parallel oder antiparallel zu dieser Richtung ausrichten. $S_i = \uparrow, \downarrow$ wird auch als Ising-Spin, binärer Spin oder Z_2 -Spin bezeichnet.

Ising - Modell in 1D

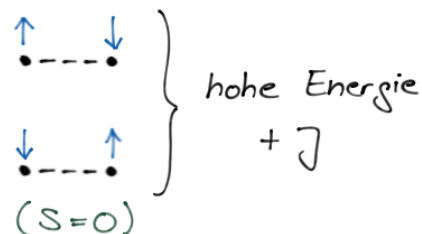
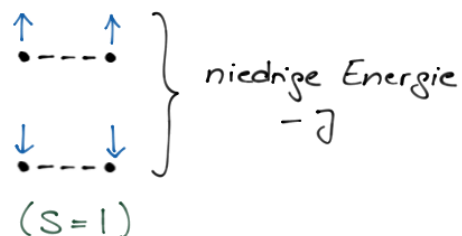


Ising Modell in 2D



usw. in 3D, 4D, ...

Benachbarte Spins sind gekoppelt mit einer Wechselwirkung, die unterscheidet



Das Energiefunktional des Ising Modells lässt sich damit für binäre Spins $S_i = \pm 1$ schreiben als

$$\mathcal{H}_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - h \sum_i S_i$$

Summe über benachbarte Spins

Während sowohl der mikroskopische Ursprung der Spins als auch ihrer paarweisen Wechselwirkung quantenmechanischer Natur ist, betrachten wir im Ising Modell nur klassische Variablen.

In räumlichen Dimensionen $d \geq 2$ zeigt das Ising-Modell einen Phasenübergang zwischen einer Hochtemperaturphase

Spins zeigen Magnetisierung in Richtung des Feldes h ,
für verschwindendes Feld $h=0$ verschwindet auch Magnetisierung $\langle S_i \rangle = 0$
(Paramagnet)

und einer Tieftemperaturphase

Auch bei verschwindendem Magnetfeld $h=0$ ist $\langle S_i \rangle \neq 0$
→ spontane Symmetriebrechung, Ferromagnetismus

Curie - Weiss - Theorie (Molekularfeldnäherung)

Die exakte Lösung des Ising Modells über eine Berechnung der Zustandssumme

$$Z = \sum_{\mathbf{s}} e^{-\beta H(\mathbf{s}, J, h)}$$

↑
Summe über Spin-Konfigurationen

ist in einer räumlichen Dimension (1d) einfach (Ising 1924), in 2d relativ anspruchsvoll (Onsager 1944) und in 3d bis heute ungelöst.

Statt dieser exakten Lösung(en) diskutieren wir zunächst eine einfache, aber sehr effektive Näherung - die Molekularfeldnäherung (mean field approximation).

Idee: Jeder Spin richtet sich aus im mittleren Feld (mean field) seiner Nachbarn

$$\begin{aligned} \rightarrow E_{\text{Ising}} &= -J \sum_i S_i \underbrace{\left(\sum_j S_j \right)}_{\text{Summe über Nachbarn}} - h \sum_i S_i \\ &= z \cdot \langle S_j \rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \# \text{ Nachbarn} = \text{Koordinationszahl des Gitters} \\ z = 2d \text{ für hyperkubische Gitter} \end{array} \right. \\ &= z \cdot m \\ &\quad \rightarrow m = M/N = \text{Magnetisierung pro Spin} \end{aligned}$$

Die Molekularfeldnäherung ersetzt also

$$\sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \rightarrow \sum_i S_i \langle S_j \rangle \cdot z$$

den benachbarten Spin S_j durch dessen Erwartungswert bzw. durchschnittliche Magnetisierung für alle z Nachbarn. Da für das ursprüngliche Ising Modell die Kopplungen zwischen Nachbarn gleich sind, ist das System invariant unter Verschiebung um eine Gitterkonstante (Translationsinvariant) und wir erwarten

$$\langle S_j \rangle = \langle S_i \rangle = m = M/N \quad \forall i, j$$

Diese Mittelwerts-Näherung vernachlässigt Fluktuationen der Spins ($\rightarrow$ Varianz).

Damit ergibt sich für die Energie in der Molekularfeldnäherung

$$E_{\text{Ising}} = - \underbrace{(h + Jzm)}_{h_{\text{eff}}} \sum_i S_i$$

$h_{\text{eff}} \rightarrow$ entspricht idealem Paramagneten in effektivem Feld

In der Molekularfeldnäherung erhalten wir also ein "effektives" Modell eines idealen (nicht-wechselwirkenden) Paramagneten in einem modifizierten Feld

$$h_{\text{eff}} = h + Jzm$$

welches von einem bislang noch unbestimmten Parameter $m = \langle S_i \rangle$ abhängt.

Andererseits können wir für diesen effektiven idealen Paramagneten die Magnetisierung wie oben (Seite 117) bestimmen

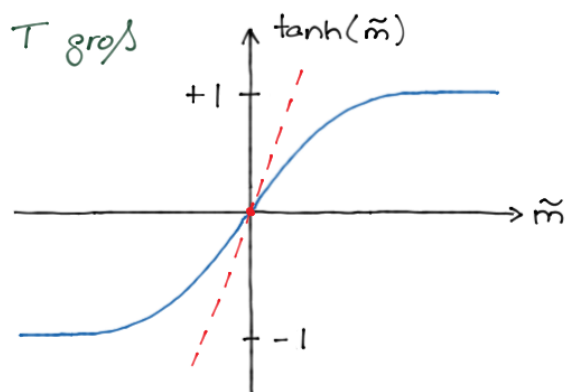
$$\underline{m} = \langle S_i \rangle = \tanh(\beta h_{\text{eff}}) = \tanh(\beta h + \beta Jz \cdot \underline{m})$$

$\hookrightarrow$ nichtlineare Selbstkonsistenzbedingung

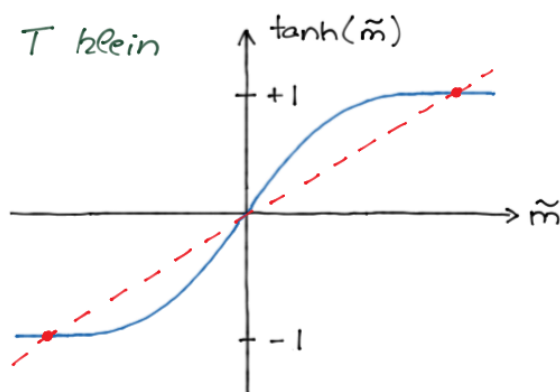
Diese Gleichung beschreibt eben jene Magnetisierung $m = \tanh(\beta h_{\text{eff}})$, die sich einstellen muß, so daß auf jeden Spin ein effektives Feld h_{eff} wirkt und damit just die Magnetisierung m erzeugt $\rightarrow$ selbstkonsistente Gleichung.

Für $h=0$ lässt sich diese Gleichung mit einer einfachen graphischen Methode lösen. Mit $\tilde{m} = \beta J z \cdot m$ lässt sich die Selbstkonsistenzgleichung

$$\frac{k_B T}{J z} \tilde{m} = \tanh(\tilde{m})$$



→ eine Lösung $\tilde{m} = 0$



→ zwei Lösungen $\tilde{m} = m^+, m^-$
(Schnittpunkt bei $\tilde{m}=0$ ignoriert)

Diese graphische Lösung unterscheidet also zwei Regimes:

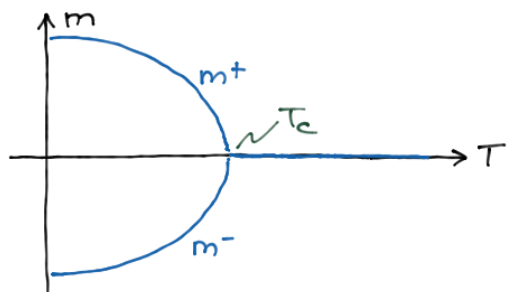
$$\frac{k_B T}{J z} > 1 \rightarrow \text{Hochtemperaturphase } m = 0 \quad \text{Paramagnet}$$

$$\frac{k_B T}{J z} < 1 \rightarrow \text{Tiefemperaturphase } m = \begin{cases} m^+ \\ m^- \end{cases} \quad \text{Ferromagnet}$$

Die kritische Temperatur für den Übergang zwischen Paramagnet und Ferromagnet ist

$$T_c = J z / k_B$$

Die Lösungen als Funktion von T



Die Magnetisierung m wird auch als Ordnungsparameter des ferromagnetischen Übergangs bezeichnet.

Kritische Exponenten (Molekularfeldnäherung)

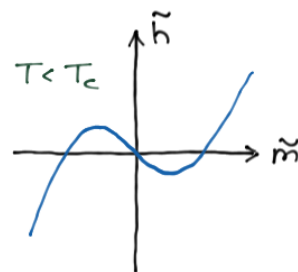
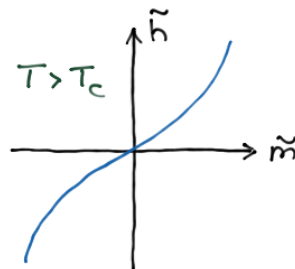
(i) Magnetisierung

$$\frac{k_B T}{Jz} \tilde{m} = \tanh(\tilde{m} + \beta h) \rightarrow \frac{T}{T_c} \cdot \tilde{m} \approx \tilde{m} + \beta h - \frac{1}{3} \tilde{m}^3 + \dots$$

$$\rightarrow \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right) \tilde{m} + \frac{1}{3} \tilde{m}^3 = \beta h = \tilde{h}$$

$$\bullet T > T_c : \tilde{m} = 0$$

$$\bullet T < T_c : \tilde{m}^2 = 3 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \text{ für } h=0$$



$$\rightarrow \tilde{m} = \sqrt{\frac{3}{T_c}} \cdot |T - T_c|^{\frac{1}{2}} \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{Zudem sehen wir für } T = T_c : \tilde{m} \sim h^{\frac{1}{3}} \rightarrow \delta = 3$$

(ii) Suszeptibilität

$$\tilde{m} = \frac{T_c}{T} \left(\tilde{m} + \beta h - \frac{1}{3} \tilde{m}^3 \right) \rightarrow \frac{\partial \tilde{m}}{\partial h} \approx \frac{T_c}{T} \left(\frac{\partial \tilde{m}}{\partial h} + \beta - \tilde{m}^2 \frac{\partial \tilde{m}}{\partial h} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde{m}}{\partial h} = \frac{\beta \cdot \frac{T_c}{T}}{1 - \frac{T_c}{T} + \frac{T_c}{T} \tilde{m}^2}$$

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial h} \Big|_{h=0} = \frac{T}{T_c} \cdot \frac{\partial \tilde{m}}{\partial h} \Big|_{h=0} = \frac{1}{k_B T} \cdot \left(1 - \frac{T_c}{T} [1 - \tilde{m}^2] \right)^{-1}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{k_B T} \left(1 - \frac{T_c}{T} \right)^{-1} = \frac{1}{k_B} (T - T_c)^{-1} & \text{für } T > T_c \\ & \tilde{m} = 0 \\ \frac{1}{k_B T} \left(1 - \frac{T_c}{T} \left[-2 + 3 \frac{T}{T_c} \right] \right)^{-1} = \frac{1}{2k_B} |T - T_c|^{-1} & T < T_c \end{cases}$$

$\delta = 1 \leftarrow$

Wir finden also in der Molekularfeldnäherung des Ising Modells exakt dieselben kritischen Exponenten wie für das van-der-Waals Gas. Auch hier werden wieder Fluktuationen vernachlässigt. Dennoch korrekt für $d > 4$.

Das eindimensionale Ising Modell

Das Ising Modell in einer räumlichen Dimension unterscheidet sich fundamental von Ising Modellen in zwei und höheren räumlichen Dimensionen. Während letztere einen Phasenübergang aus einer geordneten Phase bei einer endlichen kritischen Temperatur zeigen, ist es für das 1d Ising Modell so, daß für jede endliche Temperatur $T > 0$ jede magnetische Ordnung durch thermische Fluktuationen zerstört wird.

Dies läßt sich anhand eines einfachen Arguments zeigen:

$d=1$: Betrachte eine (periodische) Kette von Ising Spins



Wie ändert sich die freie Energie, wenn wir eine solche $\downarrow$ -Domäne in eine Kette von $\uparrow$ -Spins einfügen? Tatsächlich müssen wir dazu nur die beiden Domänenwände betrachten.

Änderung Energie $\Delta E = 2J$ pro Domänenwand

Änderung Entropie $\Delta S \sim k_B \ln N$ — " —

$$\rightarrow \Delta F = \Delta E - T \cdot \Delta S = 4J - T \cdot 2k_B \ln N \underline{\underline{< 0}} \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

Für hinreichend große Systeme ($N \rightarrow \infty$) gewinnt das System freie Energie durch das Einfügen von Domänenwänden (ein primär entropischer Effekt). Diese ProLiferation von Domänenwänden bei jeder endlichen Temperatur destabilisiert jede Form von ferromagnetischer Ordnung.

$d=2$: Betrachten wir ein Quadratgitter (mit periodischen Randbedingungen)



Auch in diesem Fall brauchen wir lediglich die Domänenwände zu betrachten

Änderung Energie $2J \cdot e$

Änderung Entropie $\ln [\# \text{ geschlossene Pfade der Länge } e] = \ln [z^e]$

$z \leq 3$



$$\rightarrow \Delta F = \Delta E - T \Delta S = 2J \cdot e - T \cdot k_B e \cdot \ln z$$

$$= e \left(2J - T k_B \ln z \right)$$

Vorzeichenwechsel bei $T_c = \frac{2J}{k_B \ln z}$

Für $T > T_c$ wird die freie Energie durch Hinzufügen einer Domäne/Domänenwand verringert ($\rightarrow$ Proliferation von Domänen, Destabilisierung magnetischer Ordnung), wohingegen für $T < T_c$ die freie Energie beim Einfügen einer Domäne zunimmt ($\rightarrow$ energetische Stabilisierung der magnetischen Ordnung).

$\rightarrow$ Es gibt einen Phasenübergang bei endlicher Temperatur.

Die Existenz eines solchen Phasenübergangs bei endlicher Temperatur lässt sich über obiges Argument auf die Dimensionalität der Domänenwände ($\triangleq$ Anregungen) zurückführen:

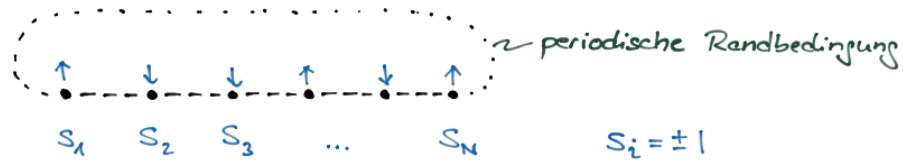
- punktförmig (1d Ising) $\rightarrow$ kein Phasenübergang
- linienförmig (2d Ising) $\rightarrow$ Phasenübergang

Exakte Lösung des eindimensionalen Ising Modells (E. Ising 1925)

-129-

Wenngleich das eindimensionale Ising-Modell keinen Phasenübergang bei endlicher Temperatur zeigt, ist es doch ein hochgradig instruktives Modell, da es sich relativ einfach exakt lösen lässt. Die dabei entwickelte Technik des sogenannten Transformieren ist von fundamentaler Bedeutung - nicht nur für die erheblich komplexere Lösung des 2d Ising Modells sondern auch für eine Vielzahl anderer Systeme.

Betrachten wir also das 1d Ising Modell mit periodischen Randbedingungen



Wir schreiben mit $\tilde{J} = \beta J$ und $\tilde{h} = \beta h$ für die Hamiltonfunktion

$$-\beta \mathcal{H}_{\text{Ising}} = \tilde{J} (S_1 S_2 + S_2 S_3 + \dots + \underbrace{S_N S_1}_{\text{periodische Randbedingung}}) + \tilde{h} (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_N)$$

und entsprechend für die Zustandssumme

$$Z = \sum_{\mathbf{r}} e^{-\beta E_{\mathbf{r}}} = \prod_{i=1}^N \left(\sum_{S_i = \pm 1} \right) \exp \left\{ \tilde{J} \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} + \tilde{h} \sum_{i=1}^N S_i \right\} \quad \text{mit } S_{N+1} = S_1$$

Diese Zustandssumme faktorisiert "fast" in $Z = (Z_i)^N$. Eine solche einfache Lösung durch Faktorisierung wird verhindert dadurch, daß benachbarte Spins wegen der Ising-Wechselwirkung $S_i S_{i+1}$ nicht komplett unabhängig voneinander sind.

Idee: Wir können aber rekursiv vorgehen und definieren Z_N^+ und Z_N^- als die Zustandssummen einer Kette von N Ising Spins mit letztem Spin $S_N = \pm 1$.

$$\begin{aligned} Z_1^+ &= e^{\tilde{h}} & Z_2^+ &= e^{\tilde{h}} (e^{\tilde{h} + \tilde{J}} + e^{-\tilde{h} - \tilde{J}}) \\ & & & \swarrow S_2 = +1 \quad \searrow S_1 = +1 \quad \searrow S_1 = -1 \\ Z_1^- &= e^{-\tilde{h}} & Z_2^- &= e^{-\tilde{h}} (e^{\tilde{h} - \tilde{J}} + e^{-\tilde{h} + \tilde{J}}) \end{aligned}$$

Damit können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} z_2^+ \\ z_2^- \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\tilde{h}+\tilde{J}} & e^{\tilde{h}-\tilde{J}} \\ e^{-\tilde{h}-\tilde{J}} & e^{-\tilde{h}+\tilde{J}} \end{pmatrix}}_{\text{Transformatrix } T} \begin{pmatrix} z_1^+ \\ z_1^- \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} z_1^+ \\ z_1^- \end{pmatrix}$$

Die Transformatrix T beschreibt wie ein System aus N Spins in ein System aus $N+1$ Spins "transferiert" wird. Dabei betrachten wir zunächst offene Randbedingungen.

$$\begin{pmatrix} z_{N+1}^+ \\ z_{N+1}^- \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} z_N^+ \\ z_N^- \end{pmatrix} = T^N \begin{pmatrix} z_1^+ \\ z_1^- \end{pmatrix}$$

Wir können die Transformatrix auch schreiben als

$$T = \begin{pmatrix} T_{++} & T_{+-} \\ T_{-+} & T_{--} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T_{ss'} = e^{\tilde{J}ss' + \tilde{h}s}$$

Damit lässt sich dann die Zustandssumme als Produkt von Transformatrizen formulieren

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{s_1 s_2 \dots s_N} \prod_{i=1}^N e^{\tilde{J}s_i s_{i+1} + \tilde{h}s_i} = \sum_{s_1 s_2 \dots s_N} \overbrace{T_{s_1 s_2} T_{s_2 s_3} T_{s_3 s_4} \dots T_{s_N s_1}}^{(T^N)_{s_1 s_1}} \\ &\quad \text{periodische Randbedingung} \\ &= \sum_{s_1} (T^N)_{s_1 s_1} = \text{Tr}(T^N) \end{aligned}$$

Die Spur $\text{Tr}(T^N)$ kann leicht berechnet werden, wenn wir zunächst T diagonalisieren

$$\text{Tr}(T^N) = \text{Tr} \begin{pmatrix} \lambda_+^N & 0 \\ 0 & \lambda_-^N \end{pmatrix} = \lambda_+^N + \lambda_-^N$$

wobei λ_+ und λ_- die Eigenwerte von T sind. Letztere werden bestimmt via

$$\det(T - \lambda I) = 0 \rightarrow \lambda_{\pm} = e^{\tilde{J}} \left[\cosh(\tilde{h}) \pm \underbrace{\sqrt{\sinh^2(\tilde{h}) + e^{-4\tilde{J}}}}_{\geq 0} \right]$$

Wenn aber $\lambda_+ > \lambda_-$ ist, gilt $\lambda_+^N \gg \lambda_-^N$. Damit

$$Z = (\lambda_+)^N \quad \text{und} \quad F = -k_B T N \cdot \ln \lambda_+$$

Nebenrechnung: $\det(T - \lambda I) = 0$

-131-

$$\rightarrow (e^{\tilde{J}+\tilde{h}} - \lambda)(e^{\tilde{J}-\tilde{h}} - \lambda) - e^{-2\tilde{J}} = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 2\lambda e^{\tilde{J}} \cosh(\tilde{h}) + e^{2\tilde{J}} - e^{-2\tilde{J}} = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \lambda_{\pm} &= \frac{1}{2} \left(2e^{\tilde{J}} \cosh(\tilde{h}) \pm \sqrt{4e^{2\tilde{J}} \cosh^2(\tilde{h}) - 4(e^{2\tilde{J}} - e^{-2\tilde{J}})} \right) \\ &= e^{\tilde{J}} \cosh(\tilde{h}) \pm e^{\tilde{J}} \sqrt{\sinh^2(\tilde{h}) + e^{-4\tilde{J}}} \end{aligned}$$

Aus der so berechneten Zustandssumme und freien Energie lassen sich nun thermodynamische Observablen berechnen.

(i) Magnetisierung

$$\begin{aligned} M &= \left\langle \sum_{i=1}^N s_i \right\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N} \left(\sum_i s_i \right) e^{-\beta H} \\ &= \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \tilde{h}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{h}} \ln Z = N \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{h}} \ln \lambda_+ \end{aligned}$$

$$\rightarrow \langle s_i \rangle = \frac{\partial}{\partial \tilde{h}} \ln \lambda_+ = 0 \quad \begin{array}{l} \text{da sowohl } \cosh(\tilde{h}) \text{ als auch } \sinh^2(\tilde{h}) \text{ bei } \tilde{h}=0 \\ \text{eine verschwindende Ableitung haben} \end{array}$$

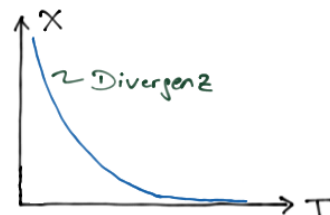
$\uparrow$
 für β endlich,
 d.h. $T > 0$

$\rightarrow$ Das 1d Ising Modell zeigt keine spontane Magnetisierung für $h=0, T>0$.

(ii) Suszeptibilität

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h=0} = \beta \left. \frac{\partial m}{\partial \tilde{h}} \right|_{\tilde{h}=0} = \beta \frac{\partial^2}{\partial \tilde{h}^2} \ln \lambda_+ \Big|_{\tilde{h}=0} = \underline{\beta e^{2\beta J}}$$

Die Suszeptibilität divergiert für $\beta \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$.



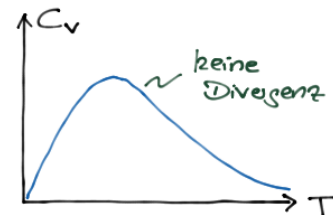
Dies bedeutet, daß das 1d Ising Modell bei $T=0$ einen Phasenübergang hat. Der (geordnete) $T=0$ Grundzustand ist also prinzipiell zu unterscheiden von den (ungeordneten) Zuständen bei endlicher Temperatur!

(iii) spezifische Wärme

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T} \langle E \rangle = - \frac{1}{k_B T^2} \partial_\beta \langle E \rangle = + \frac{1}{k_B T^2} \partial_\beta^2 \ln Z = \frac{N}{k_B T^2} \partial_\beta^2 \ln \lambda_+$$

$$\stackrel{\substack{\zeta \\ \hbar=0}}{=} \frac{N}{k_B T^2} \partial_\beta^2 \ln(\cosh(\beta J)) = \frac{N}{k_B T^2} \partial_\beta (J \cdot \tanh(\beta J)) = \frac{N J^2}{k_B T^2} \cdot \frac{1}{\cosh^2(\beta J)}$$

Die spezifische Wärme verschwindet sowohl für $T \rightarrow 0$ als auch für $T \rightarrow \infty$. Dazwischen zeigt sie einen nicht-monotonen Verlauf, so daß das System zwischen den extremen Temperaturen Entropie "freisetzen" kann.



Das zweidimensionale Ising Modell

Das 2d Ising Modell wurde 1944 von Lars Onsager (Nobelpreis 1968 für Onsager-Relationen) exakt gelöst (für $h=0$). Seine technisch hochvussierte Lösung beruht auf einer Konstruktion von $2^L \times 2^L$ Transfermatrizen. Eine technisch viel einfachere und insgesamt zugänglichere Lösung wurde 1964 von Schultz, Lieb und Mattis entwickelt, die das Ising Modell auf ein System freier Fermionen abbildet.

Die kritische Temperatur des 2d Ising Modells wurde 1941 erstmals (anhand eines Dualitätsarguments) von Kramers und Wannier berechnet

$$\sinh\left(\frac{2J}{k_B T_c}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad k_B T_c / J = 2.269185... = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{Q})}$$

$Q=2$

Onsagers exakte Lösung erlaubt überdies die Berechnung der kritischen Exponenten

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{1}{8} \quad \gamma = \frac{7}{4} \quad \delta = 15$$

Beachte, daß diese nicht mit jenen der Molekularfeldnäherung übereinstimmen. Letztere sind nur für räumliche Dimensionen $d > 4$ exakt (krit. Exponenten sind dimensionsabhängig)

$$\beta = \frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad m = \left(1 - \frac{1}{\sinh^4(2\beta J)}\right)^{1/8}$$