Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Carsten Bauer

Statistische Physik

Blatt 0

WS 2017/18

Abgabe: Keine Abgabe. **Präsenzübung**, Dienstag, 17. Oktober 2017
Webseite: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2017-StatPhys.shtml

Aufgabe 1: Erwartungswert und Varianz

Ein idealer Würfel wird zweimal geworfen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(k)$, dass die Summe der beiden Augenzahlen k ist, für jedes mögliche k.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle k \rangle = \sum_k kP(k)$.

c) Berechnen Sie die Varianz der Augenzahlsumme $\sigma_k^2 = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$.

Aufgabe 2: Verteilungen

Bei der Durchführung eines Experiments tritt das Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit p auf.

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei n Durchführungen des Experiments genau k-mal das Ereignis A zu messen, durch die **Binomialverteilung** gegeben ist:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{wobei } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

b) Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung normiert ist und bestimmen Sie deren Erwartungswert und Varianz.

c) Betrachten Sie den Grenzfall $n \to \infty$ und $p \to 0$, wobei $np = \lambda$ konstant gehalten wird. Zeigen Sie, dass man in diesem Fall die **Poisson-Verteilung**

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

erhält. Beweisen Sie, dass auch diese Verteilung normiert ist und bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\lim\limits_{n \to \infty} \binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!}$.

d) Betrachten Sie nun den Fall, dass n groß ist, wobei p konstant gehalten wird. Verwenden Sie $p = 1/2$. Zeigen Sie, dass in diesem Grenzfall die Binomialverteilung in die **Gaussverteilung**

$$P(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{k - \langle k \rangle}{\sigma_k}\right)^2\right\}$$

übergeht. Entwickeln Sie dazu die Funktion $f_n(k) = \ln P_n(k)$ um den Mittelwert $\langle k \rangle$ und benutzen Sie dabei die Stirling-Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ für großes n. Normieren Sie das Ergebnis. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz.

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallszahlen

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(x, y) = C(\alpha) e^{-x^2 - 2y^2 - \alpha x y}$$

mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $C(\alpha)$ aus der Forderung, dass die Verteilung normiert sein soll. Welche Werte darf α unter dieser Bedingung annehmen?

b) Berechnen Sie $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle$ und $\langle xy \rangle$ in Abhängigkeit von α.

Leseempfehlung: "A Long-Sought Proof, Found and Almost Lost"
https://www.quantamagazine.org/statistician-proves-gaussian-correlation-inequality-20170328/