Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Carsten Bauer

Statistische Physik

Blatt 10 (Weihnachtsblatt)

WS 2017/18

Abgabe: Freitag, **12. Januar** 2018, 10 Uhr, d.h. **in 3 Wochen**

Webseite: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2017-StatPhys.shtml

Punkte: Insgesamt gibt es 20 Punkte. Wie immer müssen (für 100%) 10 Punkte erreicht werden. Die übrigen 10 Punkte können als Bonuspunkte erworben werden. Es wird empfohlen alle Aufgabe zu bearbeiten (oder es zumindest zu versuchen).

Aufgabe 29: Maxwell-Relationen (4 Punkte)

a) Nutzen Sie den Satz von Schwarz (Reihenfolge von partiellen Ableitungen spielt keine Rolle) um ausgehend von den vollständigen Differentialen der thermodynamischen Potentiale die folgenden vier Maxwell-Relationen zu beweisen. Die Teilchenzahl N sei fixiert.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{2}$$

b) Verifizieren Sie die Maxwell-Relationen (1)-(4) explizit für das ideale Gas.

c) Die Teilchenzahl N sei nun variabel. Es gilt $dF = -SdT - pdV + \mu dN$. Zeigen Sie

$$\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{T,V} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{T,N}. \tag{3}$$

Aufgabe 30: Barometrische Höhenformel (3 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, wie der Luftdruck als Funktion der Höhe (über Meeresspiegel) abnimmt. Um die Berechnung zu vereinfachen nehmen wir an, dass die Luft nur aus einer Molekülsorte der Masse m besteht. Wir betrachten ein Gasvolumen über einer Fläche der Größe A auf Meeresspiegelniveau ($z = 0$). Es befinden sich N ununterscheidbare Moleküle in diesem Volumen.

Die Koordinaten des Moleküls i seien $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Die Energie des Gases ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + mgz_i\right), & \text{alle } z_i \geq 0 \text{ und } (x_i, y_i) \text{ innerhalb der Fläche A}, \\ +\infty, & \text{sonst}, \end{cases} \tag{4}$$

a) Berechnen Sie die Zustandssumme des Gases,

$$Z(T) = \frac{1}{h^{3N}N!} \int d^3r_1 \cdots d^3r_N d^3p_1 \cdots d^3p_N \exp\left(-\beta\mathcal{H}\right). \tag{5}$$

b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho_1(\vec{r})$ ein Teilchen des Gases am Ort $\vec{r}$ zu finden ist gegeben als

$$\rho_1(\vec{r}) = \int d^3r_1 \cdots d^3r_N d^3p_1 \cdots d^3p_N \rho(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N)\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}). \tag{6}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho_1(\vec{r})$ indem Sie das Integral ausführen. *Hinweis: Drücken Sie $\rho(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N)$ durch Z und $\mathcal{H}$ aus.*

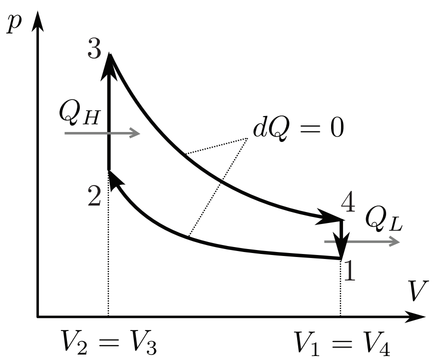
c) Nutzen Sie das Gesetz der großen Zahlen und die ideale Gasgleichung $pV = Nk_BT$ für das Volumen $V = A\Delta z$ einer Höhenscheibe der Dicke Δz, um die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho_1(\vec{r})$ in Bezug zum Druck $p(z)$ auf der Höhe z zu setzen.

Aufgabe 31: Otto-Kreisprozess (2 Punkte)

Der Prozess der in Verbrennungsmotoren durch Zündung ausgelöst und dann durchlaufen wird kann durch folgenden Otto-Prozess modelliert werden.

Betrachten Sie den allgemeinen Ausdruck für den Wirkungsgrad eines Kreisprozesses:

$$\eta = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Wärmezufuhr}}. \tag{7}$$



a) Berechnen Sie den Wirkungsgrad des gezeigten Otto-Prozesses. Nehmen Sie dabei an, dass der Adiabatenexponent γ ist, d.h. $pV^\gamma = \text{const.}$ *Hinweis: Es kann nützlich sein, die spezifische Wärme C_V zu verwenden.*

b) Skizzieren Sie η_{Otto} als Funktion des Kompressionsverhältnisses $r \equiv V_1/V_2$. Weshalb kann r, und folglich η_{Otto}, nicht beliebig groß gewählt werden?

Otto- und Diesel-Kreisprozess Vergleich: https://goo.gl/kBYdcp

Aufgabe 32: Das Photonengas (5 Punkte)

Das Photonengas wird durch folgende Relationen beschrieben:

$$\mu = 0, \quad pV = \frac{1}{3}E. \tag{8}$$

a) Zeigen Sie, dass der Druck ausschließlich von der Temperatur abhängt: $p = p(T)$

b) Leiten Sie Ausdrücke für die innere Energie $E(T, V, p(T))$, die freie Energie $F(T, V, p(T))$ und die Entropie $S(T, V, p(T))$ als Funktion von T, V und $p(T)$ her.
Hinweis: Verwenden Sie die Euler-Gleichung $E = TS - pV + \mu N$. Sie müssen $p(T)$ an dieser Stelle noch nicht explizit kennen.

c) Leiten Sie eine Differentialgleichung für $p(T)$ her, um die T-Abhängigkeit des Drucks zu bestimmen. Lösen Sie die Differentialgleichung. Ergebnis: $p(T) = aT^4$.

d) Schreiben Sie nun die freie Energie $F(T, V, N)$, die innere Energie $E(T, V, N)$ und die Entropie $S(T, V, N)$ als Funktion von T, V, N. Erklären Sie die Abhängigkeit von N.

e) Bestimmen Sie die Enthalpie $H(S, p, N)$ per Legendre-Transformation.

Aufgabe 33: Adiabatische Entmagnetisierung (6 Punkte)

Für eine paramagnetische Substanz in einem homogenen äußeren Magnetfeld nimmt der erste Hauptsatz die folgende Form an,

$$dE = dQ - MdB. \tag{9}$$

Hierbei ist die Magnetisierung M die zum Magnetfeld B gehörige verallgemeinerte Kraft

$$M = M(B, T) = \frac{cB}{T} \quad \text{mit} \quad c > 0. \tag{10}$$

Des Weiteren sei $\tilde{E} = E + BM$ und

$$\left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial T}\right)_M = \frac{A}{T^2} \quad \text{mit} \quad A > 0. \tag{11}$$

a) Zeigen Sie zunächst allgemein: Wenn die Magnetisierung $M(B, T)$ nur vom Verhältnis B/T abhängt, z.B. durch die beliebige Funktion $f(x)$,

$$M = N\mu_{\text{magn}} f\left(\frac{\mu_{\text{magn}} B}{k_B T}\right), \tag{12}$$

dann ist die innere Energie $\tilde{E}$ unabhängig von der Magnetisierung M, d.h.

$$\left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial M}\right)_T = 0. \tag{13}$$

Hinweis: Führen Sie geeignete Legendre-Transformationen durch, um die Differentiale von $\tilde{E}(S, M)$, $F(T, B)$ und $\tilde{F}(T, M)$ zu erhalten und leiten Sie eine nützliche Maxwell-Relationen her.

b) Betrachten Sie eine isotherme Magnetisierung von $B = 0$ nach $B = B_a$ bei $T = T_a = \text{const.}$ Wie groß ist die Wärmedifferenz? Gewinnt oder verliert das System diese Wärme?

c) Betrachten Sie nun eine adiabatische Entmagnetisierung von $B = B_a$ zu $B = 0$ mit Anfangstemperatur T_a. Welche Endtemperatur wird erreicht? Nimmt die Temperatur im Laufe des Prozesses zu oder ab?

d) Versuchen Sie die Effekte in (b) und (c) anschaulich zu erklären.