Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Carsten Bauer

Statistische Physik

Blatt 2

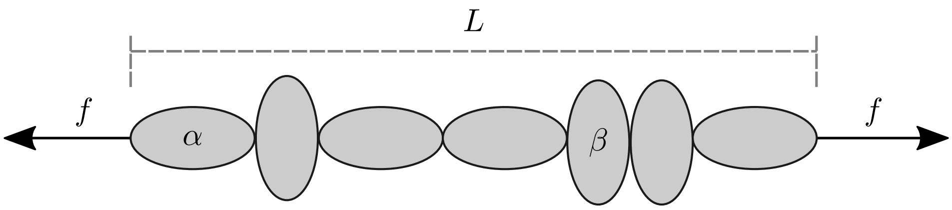
WS 2017/18

Abgabe: Freitag, **27. Oktober** 2017, 10 Uhr

Webseite: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2017-StatPhys.shtml

Aufgabe 7: Molekülkette (6 Punkte)

Gegeben sei eine lange eindimensionale Kette aus N Molekülen. Jedes Molekül kann sich in zwei Konfigurationen α und β befinden, die jeweils durch die Länge a bzw. b entlang der Kettenachse charakterisiert sind.



a) Zeigen Sie, dass die Zahl der Moleküle im Zustand α bzw. β durch $n_\alpha = (L - bN)/(a - b)$, bzw. $n_\beta = (L - aN)/(b - a)$ gegeben ist.

b) Beweisen Sie, dass die Entropie $S(L)$ der Kette als Funktion ihrer Gesamtlänge L gegeben ist durch:

$$S(L) = k_B \left[N \ln N - n_\alpha \ln n_\alpha - n_\beta \ln n_\beta \right]. \tag{1}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Stirling-Formel in der Form $\ln k! \approx k \ln k - k$ und ignorieren Sie fortan der Einfachkeit halber, dass die Anzahl der Moleküle in den einzelnen Konfigurationen nur natürliche Zahlen annehmen kann.

c) Im Gleichgewicht lässt sich das Verhältnis aus der Spannungskraft f am Ende der Kette, die nötig ist um die Kette auf der Länge L festzuhalten, und der Temperatur T mittels $f/T = \mathrm{d}S/\mathrm{d}L$ berechnen (vgl. Vorlesung mit $p \hat{=} f$, $V \hat{=} L$). Zeigen Sie, dass gilt

$$f/T = -\frac{k_B}{a - b} \ln \left\{ -\frac{L - bN}{L - aN} \right\}. \tag{2}$$

d) Berechnen Sie die Länge L_0 bei der die Spannungskraft verschwindet. Entwickeln Sie dann die Spannungskraft $f(L)$ bis zur ersten Ordnung um L_0. Zeigen Sie, dass ein Hook'sches Gesetz der Form

$$f(L_0 + \Delta L) = -\frac{4k_B T}{N(a-b)^2}\Delta L + \mathcal{O}(\Delta L^2) \tag{3}$$

gilt. Die Molekülkette entspricht also einer *entropischen Feder*!

Aufgabe 8: Kugelvolumen in höheren Dimensionen (4 Punkte)

Systeme in der statistischen Physik haben oft einen hochdimensionalen Konfigurationsraum, da sie in der Regel aus sehr vielen Freiheitsgraden bestehen. Um Mikrozustände abzuzählen müssen wir daher oft hochdimensionale Volumina berechnen. In der Vorlesung haben wir in der Herleitung der Entropie des Idealen Gases das Volumen einer $3N$-dimensionalen Kugel mit Radius R verwendet. Im Folgenden wollen wir das vorweggenommene Resultat $V_{3N}(R) = \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!}R^{3N}$ herleiten.

a) Beweisen Sie zunächst durch partielle Integration die Eigenschaft $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ der *Gammafunktion*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Bemerkung: Die Gamma Funktion ist eine Erweiterung der Fakultätsfunktion auf reelle und komplexe Argumente. Es gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

b) Das Volumen einer n-dimensionalen Kugel mit Radius R ist gegeben durch

$$V_n(R) = \int_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n. \tag{5}$$

Verwenden Sie n-dimensionale Kugelkoordinaten, deren Funktionaldeterminante die Form $\det J_n = r^{n-1}G(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ hat, um zu zeigen, dass für das Volumen $V_n(R) = \frac{1}{n}R^n K_n$ gilt.
Hinweis: Die Konstante K_n kann in Integralform angegeben werden.

Um die Konstante K_n explizit zu bestimmen, betrachten wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n. \tag{6}$$

c) Berechnen Sie das mehrdimensionale Gaußsche Integral (6).
Hinweis: Das bekannte Ergebnis für das einfache Gaußsche Integral darf verwendet werden.

d) Transformieren Sie das Gaußsche Integral (6) in n-dimensionale Kugelkoordinaten, identifizieren Sie die Gammafunktion und bestimmen Sie die Konstante K_n mit dem Ergebnis aus c). Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass somit die Volumenformel

$$V_n(R) = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n \tag{7}$$

lautet und für $n = 3N$ das in der Vorlesung verwendete Resultat herauskommt.