Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Carsten Bauer

Statistische Physik

Blatt 5

WS 2017/18

Abgabe: Freitag, **24. November** 2017, 10 Uhr
Webseite: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2017-StatPhys.shtml

Aufgabe 15: Ising Paramagnet (5 Punkte)

Wir betrachten N entkoppelte Spins in einem Magnetfeld h. Wählen wir die Quantisierungsachse der Spins parallel zum Magnetfeld, dann sind die Spinoperatoren diagonal und können lediglich Eigenwerten $s_i = \pm 1$ annehmen, wobei wir etwaige Vorfaktoren $\sim \hbar$ der Einfachheit halber nicht mitführen. Da keine weiteren Eigenschaften der Quantenmechanik einfließen, kann das System als klassisches Modell eines Paramagneten aufgefasst werden. Die Hamiltonfunktion lautet

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N} h s_i. \tag{1}$$

Das Spinsystem befinde sich ferner im Gleichgewicht mit einem Wärmereservoir der Temperatur T, so dass die Spin-Konfigurationen $\{s_i\}$ der Boltzmann-Verteilung gehorchen.

a) Berechnen Sie die Zustandssumme Z als Funktion von h und T.

b) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle = \langle \mathcal{H} \rangle$ des Ising Paramagneten.
Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe die Kenntnisse aus Aufgabe 13 Blatt 4 verwenden.

c) Die Magnetisierung des Systems ist definiert als $M = \sum_{i=1}^{N} s_i$. Zeigen Sie, dass für den Ising Paramagneten $\langle M \rangle = k_B T \partial_h \ln Z(h,T)$ gilt und berechnen Sie anschließend explizit die Magnetisierung.

d) Berechnen Sie die Fluktuationen (d.h. Varianzen) der Energie, $(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$, und der Magnetisierung, $(\Delta M)^2$, des Ising Paramagneten.

e) Skizzieren Sie die mittlere Magnetisierung $\langle M \rangle$ und deren Fluktuationen $(\Delta M)^2$ - in zwei getrennten Plots - als Funktion der Temperatur T für verschiedene Magnetfeldstärken h. Jeder Plot soll also eine Funktionsschar (unterschiedliche h) enthalten. Setzen Sie $k_B = 1$. Interpretieren Sie die Abhängigkeiten physikalisch.
Hinweis: Sie dürfen sehr gerne Julia zum Anfertigen der Plots verwenden! Wählen Sie bspw. $T \in [0, 20]$ *und* $h \in [0, 1]$.

Aufgabe 16: Shannon-Entropie und Datenkompression (5 Punkte)

Wir betrachten ein Alphabet, das N Buchstaben $\{a_1, \ldots, a_N\}$ enthält.

a) Wie viele Bits pro Buchstabe benötigt man, um dieses Alphabet binär ohne Komprimierung zu kodieren?

Nun betrachten wir konkret das Alphabet $\{a, b, c, d\}$, wobei die Auftrittswahrscheinlichkeit der Buchstaben gegeben ist durch: $P(a) = \frac{1}{2}$, $P(b) = \frac{1}{4}$, $P(c) = \frac{1}{8}$, $P(d) = \frac{1}{8}$.

b) Berechnen Sie die Shannon-Entropie $H(\{p_i\}) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i$.
Hinweis: Beachten Sie, dass hier der Logarithmus zur Basis 2 auftaucht.

Wir definieren folgende (durch die Shannon-Entropie motivierte) Kodierung dieses Alphabets: $a \to 0, b \to 10, c \to 110, d \to 111$.

c) Beweisen Sie, dass diese Kodierung im Sinne der Existenz einer bijektiven Zuordnung

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Kette aus Buchstaben} \\ \text{'ca... bd'} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Binäre Zeichenkette} \\ \text{'1100... 10111'} \end{array} \right\}$$

wohldefiniert ist.

d) Berechnen Sie die durchschnittliche Länge einer kodierten Nachricht aus N Buchstaben aus obigem Alphabet. Stellen Sie einen Bezug zur Shannon-Entropie her.

e) Betrachten Sie folgende Alphabete. Berechnen Sie die Shannon-Entropie und finden Sie eine optimale Kodierung bei der jeder Buchstabe einzeln kodiert ist.

(i) $\{a, b, c, d\}$ mit $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$.

(ii) $\{a, b, c, d\}$ mit $P(a) = \frac{1}{2}, P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{6}$.

(iii) $\{a, \ldots, h\}$ mit $P(a) = \frac{1}{2}, P(b) = \frac{1}{4}, P(c) = \frac{1}{8}, P(d) = \frac{1}{16}, P(e) = \frac{1}{32}$,
$P(f) = \frac{1}{64}, P(g) = \frac{1}{128}, P(h) = \frac{1}{128}$

(iv) $\{a, \ldots, e\}$ mit $P(a) = \frac{1}{2}, P(b) = P(c) = P(d) = P(e) = \frac{1}{8}$.

Ist es immer möglich ein Alphabet buchstabenweise so zu kodieren, dass die durchschnittliche Länge einer kodierten Nachricht geteilt durch die Zahl der ursprünglichen Buchstaben dem Wert der Shannon-Entropie entspricht?

Aufgabe 17: Anwesenheitsübung: Gibbs Entropie

Diese Aufgabe wird im Tutorium zusammen mit dem Tutor bearbeitet.
Wir wollen im Folgenden den Zusammenhang zwischen der Gibbs Entropie und der Boltzmann-Verteilung $p_r = e^{-\beta E_r}$ untersuchen.

a) Zeigen Sie, analog zu Seite 38 im Skript, dass die kanonische Zustandssumme in Sattelpunktnäherung

$$Z = e^{\sigma(E^*) - \beta E^*} \tag{2}$$

lautet, wobei $\sigma(E)$ die Boltzmann Entropie ist.

b) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus a) zusammen mit dem Vorlesungsresultat

$$\sigma_{\text{Gibbs}} = \beta \langle E \rangle + \ln Z \tag{3}$$

um zu zeigen, dass die Gibbs Entropie am Sattelpunkt mit der Boltzmann Entropie übereinstimmt.

c) Zeigen Sie nun, dass die Boltzmann-Verteilung die Verteilung mit maximaler Gibbs Entropie ist. Maximieren Sie dafür

$$\ln \Omega_N = \ln \frac{N!}{\Pi_{r'} n_{r'}} \tag{4}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\sum_r n_r = N \qquad \text{und} \qquad \sum_r n_r E_r = E \tag{5}$$

unter Verwendung von zwei Lagrange-Multiplikatoren.
Hinweis: Es ist nur die Ableitung nach den n_r, der Anzahl der Replika im Mikrozustand r, relevant. Das zu zeigende Resultat lautet $n_r \propto e^{-\beta E_r}$.