Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Carsten Bauer

Statistische Physik

Blatt 6

WS 2017/18

Abgabe: Freitag, **1. Dezember** 2017, 10 Uhr

Webseite: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2017-StatPhys.shtml

Aufgabe 18: Zwei-Niveau-System mit variierender Teilchenzahl (4 Punkte)

Gegeben sei ein physikalisches System mit zwei Energieniveaus $\epsilon_1 = 0$ und $\epsilon_2 = \epsilon$ das insgesamt ein Teilchen beherbergen kann. Wir schließen den Fall von zwei Besetzungen, je eine pro Energieniveau, zunächst aus. Im Sinne des großkanonischen Ensembles kann das System demnach entweder unbesetzt sein (Energie 0), besetzt sein in ϵ_1 (Energie 0) oder besetzt sein in ϵ_2 (Energie ϵ).

a) Leiten Sie die großkanonische Zustandssumme des Systems her. Schreiben Sie diese als Funktion der Fugazität $z = e^{\beta\mu}$, d.h. formal als $\mathcal{Y}(\beta, z)$.

b) Zeigen Sie, dass die thermische mittlere Besetzung des Systems gegeben ist durch

$$\langle N \rangle = \frac{z + ze^{-\beta\epsilon}}{\mathcal{Y}}. \tag{1}$$

c) Was ist die thermische mittlere Besetzung des Zustands mit Energie ϵ?

d) Finden Sie einen Ausdruck für die thermische mittlere Energie des Systems.

e) Erlauben Sie nun, dass die Niveaus ϵ_1 und ϵ_2 gleichzeitig von je einem Teilchen besetzt werden können. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{Y} = 1 + z + ze^{-\beta\epsilon} + z^2 e^{-\beta\epsilon} = (1 + z)\left(1 + ze^{-\beta\epsilon}\right) = \mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2. \tag{2}$$

Weil $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2$ faktorisiert, können wir die beiden Niveaus als unabhängig betrachten.

Aufgabe 19: Wasserstoffatom (2 Punkte)

Betrachten Sie ein Ensemble fixierter Wasserstoffatome. Nehmen Sie an, dass jedes Atom in einem der vier folgenden Zuständen sein kann:

Zustand	*Anzahl der Elektronen*	*Energie*
Grundzustand	1	$-\frac{1}{2}\Delta$
Positives Ion	0	$-\frac{1}{2}\delta$
Negatives Ion	2	$\frac{1}{2}\delta$
Angeregt	1	$\frac{1}{2}\Delta$

Leiten Sie eine Bedingung für das chemische Potential μ her, so dass im Mittel ein Elektron pro Atom gebunden ist.
Hinweis: Gehen Sie ähnlich zu Aufgabe 18 vor. Es könnte hilfreich sein $2\cosh x = e^x + e^{-x}$ *zu verwenden.*

Aufgabe 20: Jacobi-Determinante (4 Punkte)

Die Jacobi-Determinante einer Transformation $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix}$ ist die Determinante der Jacobi-Matrix, d.h. der Matrix sämtlicher partieller Ableitungen:

$$J \equiv \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v & \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \\ \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)_v & \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_u \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_u - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)_v . \tag{3}$$

Hierbei wird bei jeder partiellen Ableitung die Variable, die als Subskript angegeben ist, konstant gehalten (z.B. v bei $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v$).

a) Es seien $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$. Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

(i) Die Kettenregel

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}, \tag{4}$$

(ii) unter Verwendung der Kettenregel,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial f}\right)_v}, \tag{5}$$

(iii) und mit Hilfe von (i) und (ii),

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_f}. \tag{6}$$

b) Verifizieren Sie diese Eigenschaften explizit am Beispiel der 2D Polarkoordinaten:
$f = u^2 + v^2, g = uv, u = r\cos\varphi, v = r\sin\varphi, x = r$ und $y = \varphi$.