Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Carsten Bauer

# Statistische Physik

Blatt 8

*WS 2017/18*

**Abgabe**: Freitag, **15. Dezember** 2017, 10 Uhr

**Webseite**: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2017-StatPhys.shtml

## Aufgabe 23: Vollständige und unvollständige Differentiale (4 Punkte)

Ein Differential $dF$ nennt man vollständig, wenn eine Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet existiert, sodass

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i. \tag{1}$$

Man nennt dann

$$(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) := \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) \tag{2}$$

ein konservatives Feld oder Potentialfeld (mit dem zugehoerigen Potential F). Das Potential F ist in diesem Fall bis auf eine Konstante eindeutig definiert.
Fuer ein solches Potentialfeld ist der Wert des Wegintegrals wegunabhaengig (solange der Weg $\gamma$ innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebietes liegt, auf dem das Potentialfeld wohldefiniert ist) und hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab:

$$\int_\gamma dF = F(b) - F(a). \tag{3}$$

**a)** Geben Sie die notwendige Bedingung für die vektorwertige Funktion $\vec{f}(x, y, z)$ an, dass das Differential

$$dF = f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz \tag{4}$$

vollständig ist. Wie würde die Bedingung in zwei Dimensionen lauten, d.h. für ein $\vec{f}(x, y)$?

**b)** Ist das Differential $dF = dx + xdy + ydz$ vollständig? Falls ja, berechnen Sie $F(x, y, z)$. Berechnen Sie in jedem Fall das Wegintegral

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} dF \tag{5}$$

für die beiden verschiedenen Wege:

$$\gamma_A : (0, 0, 0) \to (1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \to (1, 1, 1) \tag{6}$$
$$\gamma_B : (0, 0, 0) \to (0, 0, 1) \to (0, 1, 1) \to (1, 1, 1) \tag{7}$$

**c)** Ist das folgende Differential vollständig? Falls ja, berechnen Sie $F(x, y)$.

$$dF = \frac{y}{x}dx + \ln\left(\frac{x}{y^{\alpha+1}}\right)dy, \qquad x, y > 0, \alpha = \text{const.} \tag{8}$$

## Aufgabe 24: Wärme als unvollständiges Differential (3)

Ein thermodynamisches System kann mit seiner Umgebung mechanische Arbeit $đW = -pdV$ und Wärme $đQ$ austauschen. Der 1. Hauptsatz kann dann in der Form

$$đQ = dE + pdV \tag{9}$$

geschrieben werden.

**a)** Welche (physikalisch nicht sinnvolle) Konsequenz hat es, wenn man fordert, dass $đQ$ ein vollständiges Differential ist?

**b)** Nehmen Sie nun an, dass der Druck $p$ eine Funktion der Energiedichte $u = E/V$ ist, d.h. $p = f(u)$. Bestimmen Sie einen sogenannten integrierenden Faktor $\mu(E, V)$, der

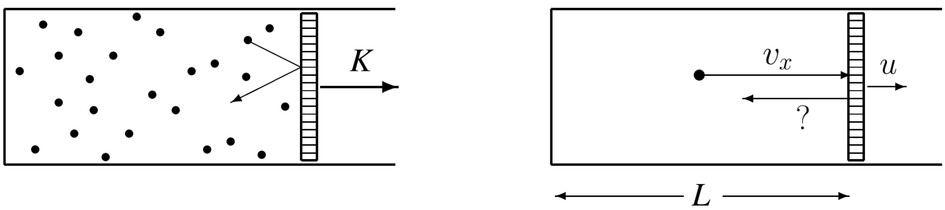
$$d\sigma = \mu(E, V)đQ \tag{10}$$

zu einem vollständigen Differential macht.
*Hinweis: Welcher integrierende Faktor ergibt sich für $dF = a(y)dx + b(x)dy$?*

**c)** Führen Sie jetzt Aufgabenteil b) konkret für $f(u) = \alpha u$ durch und bestimmen Sie die Zustandsfunktion $\sigma(E, V)$.

## Aufgabe 25: Druck des idealen Gases (3 Punkte)

Wir betrachten ein ideales Gas in einer quaderförmigen Box mit Seitenlängen $L_x, L_y$ und $L_z$, wobei eine Seitenwand durch einen Kolben bewegt werden kann (als veränderlichen äußeren Parameter wählen wir die Seitenlänge $L = L_x$). Die Kolbenverschiebung sei quasistatisch, sodass sich immer ein neues Gleichgewicht einstellen kann (hierfür müssen wir formal schwache Wechselwirkungen annehmen). Wie gewöhnlich bezeichne $V$ das Volumen, $E$ die Energie und $N$ die Teilchenanzahl.




Die mikroskopische Definition des Drucks als verallgemeinerte Kraft lautet

$$p = -\left\langle \frac{\partial E_r}{\partial V} \right\rangle, \tag{11}$$

wobei der Index $r$ die Mikrozustände des Systems charakterisiert, d.h.

$$r = \begin{cases} (n_1, \ldots, n_{3N}), & \text{quantenmechanisch,} \\ (\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N), & \text{klassisch.} \end{cases} \tag{12}$$

Die $n_i$ sind hier die Impulsquantenzahlen und die $q_i, p_i$ klassische Positionen und Impulse.

**a)** Betrachten Sie das Gas quantenmechanisch.

(i) Wie lautet die Energie $E_r$ des Systems in einem Mikrozustand?

(ii) Berechnen Sie den Druck $p(E, V)$ des Systems.

**b)** Betrachten Sie das Gas klassisch.

(i) Wir schauen uns ein einzelnes Atom genauer an: Die Reflexion dieses Atoms an der bewegten Wand erhöht oder verringert dessen kinetische Energie $\epsilon$, je nachdem ob das Volumen gerade verkleinert oder vergrößert wird. Berechnen Sie die Energieänderung $\Delta\epsilon$ indem Sie die Reflexion im Ruhesystem des Kolbens betrachten.

(ii) Wie lange ($\Delta t$) dauert es bis das Atom nach einer Reflexion erneut an der bewegten Wand reflektiert wird? Wie weit ($\Delta L$) hat sich die Seitenwand in dieser Zeit bewegt? *Hinweis: Wir studieren ein* ***ideales*** *Gas.*

(iii) Zeigen Sie, dass

$$\Delta\epsilon = -2\epsilon_x \frac{\Delta L}{L} + \mathcal{O}((\Delta L)^2), \quad \text{mit } \epsilon_x = \frac{1}{2} m v_x^2. \tag{13}$$

(iv) Mitteln Sie über alle $N$ Teilchen um zu zeigen, dass

$$p = \frac{2}{3} \frac{E}{V}. \tag{14}$$