Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Statistische Physik

Blatt 10

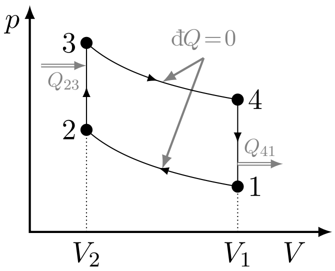
WS 2020/21

Abgabe: Montag, **25.01.2021**, 10:00 Uhr **Besprechung**: Dienstag, 26.01.2021

Webseite: www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2020-StatPhys.shtml

Aufgabe 34: Otto-Kreisprozess (4 Punkte)

Wir betrachten den skizzierten Kreisprozess, der mit einem idealen Gas als Arbeitssubstanz ausgeführt wird. Die Abschnitte 1→2 und 3→4 sind Adiabaten.



a) Der dargestellte Kreisprozess beschreibt einen idealisierten Otto-Motor (Viertakt-Verbrennungsmotor). In welchem Schritt leistet der Motor Arbeit? In welchem Schritt wird das Luft-Kraftstoff-Gemisch gezündet?

b) Berechnen Sie die geleistete Arbeit und den Wirkungsgrad, $\eta = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{Wärmezufuhr}}$. Der Adiabatenkoeffizient ist γ, also $pV^\gamma = \text{const}$. Drücken Sie η sowohl durch das Kompressionsverhältnis $r = V_1/V_2$, als auch durch T_1/T_2 aus.

c) Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wirkungsgrad eines Carnot-Prozesses, der zwischen der höchsten und der niedrigsten hier auftauchenden Temperatur arbeitet. Begründen Sie mit Ihrem Resultat aus (a), warum der Wirkungsgrad des Otto-Motors den des Carnot-Prozesses nicht erreichen kann.

Aufgabe 35: Maxwell-Relationen (2 + 2 Punkte)

a) Zeigen Sie ausgehend von den Differentialen der thermodynamischen Potentiale (Energie E, freie Energie F, Enthalpie H, freie Enthalpie G) für festes N die Maxwell-Relationen

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{4}$$

b) **Bonusaufgabe:** Verifizieren Sie die Maxwell-Relationen (1) und (2) explizit für das ideale Gas. *Hinweis: Gleichung 3 aus A28 ist nützlich. Für den Adiabatenkoeffizienten gilt* $\gamma = \frac{5}{3}$.

Aufgabe 36: Das Photonengas (4 + 1 Punkte)

Für das Photonengas gelten die folgenden Relationen:

$$\mu = 0 \qquad \text{und} \qquad E = 3pV. \tag{5}$$

Der Druck ist eine Funktion der Temperatur, $p = p(T)$, und unabhängig vom Volumen.

a) Finden Sie, ausgehend von der thermodynamischen Fundamentalrelation $E = TS - pV + \mu N$, Ausdrücke für die innere Energie E, die freie Energie F und die Entropie S, jeweils als Funktion von T, V, und – dem später noch explizit zu bestimmenden – $p(T)$.

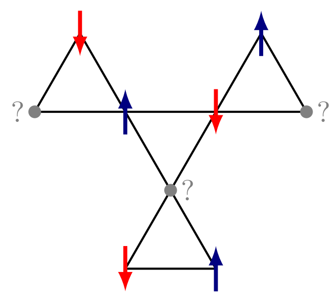
b) **Bonusaufgabe:** Bestimmen Sie jetzt $p(T)$. *Hinweis: Sie können eine Differentialgleichung für $p(T)$ u.A. durch Vergleich der Ableitungen $(\partial S/\partial T)_{V,N}$ und $(\partial E/\partial T)_{V,N}$ erhalten.*

In Teil (b) sollten Sie als Ergebnis $p = aT^4,\ a = \text{const}$ erhalten haben. Diese Relation ist unter dem Namen **Stefan-Boltzmann-Gesetz** bekannt und beschreibt den Strahlungsdruck eines idealen Schwarzen Körpers.

c) Berechnen Sie nun die innere Energie E, die freie Energie F und die Entropie S als Funktion von T, V. Warum sind die Potentiale unabhängig von N? Berechnen Sie auch E und F als Funktion der jeweiligen **natürlichen Variablen**. Welche Bedeutung haben natürliche Variablen für thermodynamische Potentiale?

d) Bestimmen Sie die Enthalpie $H(S, p)$ durch Legendre-Transformation aus $E(S, V)$.

Aufgabe 37: Residuelle Entropie (5 + 2 Punkte)



In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass der 3. Hauptsatz ($S \to 0$ wenn $T \to 0$) nicht die selbe universelle Gültigkeit für sich beanspruchen kann, wie der 1. und 2. Hauptsatz, da es eine Vielzahl an Systemen gibt, die ihm widersprechen und bei $T = 0$ eine **residuelle Entropie** aufweisen. Bekannte Beispiele sind Wassereis und Glas und – aus dem Bereich Magnetismus – deren “Spin-Versionen”, Spin-Eis und Spin-Gläser, zwei Beispiele für **frustrierte Magnete**. Von Frustration spricht man, wenn es nicht möglich ist, alle Wechselwirkungen zwischen den Spins gleichzeitig zu befriedigen. Dies ist in der nebenstehenden Abbildung von Ising-Spins auf einem **frustrierten Gitter** (ein Ausschnitt eines Kagome-Gitters) skizziert. Die Spins können nur nach oben oder nach unten zeigen. Bei **antiferromagnetischer** Wechselwirkung zwischen benachbarten Spins wollen diese immer in **entgegengesetzte** Richtungen zeigen. Nicht alle drei Spins eines Dreiecks können so angeordnet werden, dass diese Bedingung erfüllt ist. Jede Wahl der Spinrichtung an den grauen Gitterplätzen führt zu parallel ausgerichteten, benachbarten Spins. Auf der Homepage haben wir Ihnen ein Notebook zur Verfügung gestellt, auf dem Sie ausgehend von der Wärmekapazität (die z.B. experimentell sehr einfach zugänglich ist) ein System solcher Spins auf dem **Dreiecksgitter** untersuchen und den Unterschied zwischen ferromagnetischer und antiferromagnetischer Wechselwirkungen zwischen nächsten Nachbarn analysieren sollen. Laden Sie das Notebook herunter und bearbeiten Sie die Aufgabenteile (a) bis (c), und optional auch die Zusatzaufgabe (d).