Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Statistische Physik

Blatt 11

WS 2020/21

Abgabe: Montag, **01.02.2021**, 10:00 Uhr **Besprechung**: Dienstag, 02.02.2021

Webseite: www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2020-StatPhys.shtml

Aufgabe 38: Idealer Paramagnet (9 Punkte)

Wir betrachten ein System aus N wechselwirkungsfreien, unterscheidbaren Spins $S = \frac{1}{2}$ in einem homogenen äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Die möglichen Energien des Spins i sind dann durch

$$\epsilon_i = -2\mu_B B S_i^z = \pm\mu_B B \tag{1}$$

gegeben, wobei μ_B das Bohrsche Magneton ist. Die Gesamtenergie lautet damit

$$H = \sum_i \epsilon_i = -2\mu_B B \sum_{i=1}^{N} S_i^z \tag{2}$$

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme des Systems $Z(B,T)$.

b) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle$.

c) Die mittlere **Magnetisierung** ist durch

$$M = \langle 2\mu_B \sum_{i=1}^{N} S_i^z \rangle \tag{3}$$

gegeben. Zeigen Sie den Zusammenhang $M = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$ und berechnen Sie $M(T,B)$ explizit. Skizzieren Sie M für verschiedene fixierte Werte von T als Funktion von B, sowie als Funktion von T für verschiedene fixe B und diskutieren Sie das Resultat.

d) Zeigen Sie, dass sich für die magnetische Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial M}{\partial B}$ im Grenzfall $k_B T \gg \mu_B B$ das Curie-Gesetz $\chi \sim \frac{1}{T}$ ergibt.

e) Berechnen und skizzieren Sie die Wärmekapazität $C_B(T)$.

f) Auf der Homepage haben wir Ihnen ein Notebook mit einer Monte-Carlo Simulation zur Verfügung gestellt, mit der Sie das Resultat aus Teil (c) überprüfen sollen. Machen Sie sich mit dem Code vertraut und bearbeiten Sie die Aufgabenstellung.
Hinweis: Wir verwenden hier die häufige Schreibweise $H = -h\sum_i \sigma_i$ für die Energien/den Hamiltonoperator aus Gleichung (2), mit dem Magnetfeld h und $\sigma_i = \pm 1$.

Aufgabe 39: Adiabatische Entmagnetisierung (6 Punkte)

Wie in Aufgabe 38 gezeigt, nimmt ein paramagnetischer Festkörper in einem externen Magnetfeld eine makroskopische Magnetisierung $M \neq 0$ an. Eine Erhöhung des Magnetfeldes $\mathrm{d}B$ führt zu einer Änderung $-M\,\mathrm{d}B$ der inneren Energie. Der erste Hauptsatz nimmt dann die Form

$$\mathrm{d}E = \text{đ}Q - M\,\mathrm{d}B. \tag{4}$$

an. In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, wie man sich diese paramagnetischen Eigenschaften zu Nutze machen kann, um Materialien abzukühlen.

a) Zeigen Sie zunächst allgemein: Wenn die Magnetisierung $M(B,T)$ nur vom Verhältnis B/T abhängt (siehe A38(c)), z.B. durch die beliebige Funktion $f(x)$,

$$M = N\mu_B f\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right), \tag{5}$$

dann ist die Größe $\tilde{E}(T,M) = E + BM$ unabhängig von der Magnetisierung M, d.h.

$$\left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial M}\right)_T = 0. \tag{6}$$

Hinweis: Führen Sie geeignete Legendre-Transformationen durch, um die Differentiale von $\tilde{E}(S,M)$, $F(T,B)$ und $\tilde{F}(T,M)$ zu erhalten und leiten Sie aus $\mathrm{d}\tilde{F}$ eine nützliche Maxwell-Relationen her.

Der Paramagnet befinde sich jetzt im Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur T_a. Diese sei so groß gewählt, dass das Curie-Gesetz aus Aufgabe 38(d) gültig ist, also

$$M(B,T) = \frac{cB}{T} \quad \text{mit} \quad c > 0. \tag{7}$$

b) Ein äußeres Magnetfeld wird jetzt von $B = 0$ bis auf die Stärke $B = B_a$ hochgefahren. Das Wärmebad hält die Temperatur des Paramagnetens dabei konstant bei $T = T_a$. Wie ändert sich die Wärme bei dieser **isothermen Magnetisierung**? Gewinnt oder verliert das System diese Wärme?

c) Jetzt wird der Paramagnet thermisch isoliert und das Magnetfeld wird adiabatisch auf den Wert $B = 0$ zurückgefahren. Welche Endtemperatur T_e stellt sich nach dieser **adiabatischen Entmagnetisierung** ein? *Hinweis: Benutzen Sie $\left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial T}\right)_M = \frac{A}{T^2}$ mit $A > 0$. Diesen Zusammenhang kann man im Hochtemperaturlimes des Resultats aus A38(e) zeigen.*

d) Versuchen Sie die Effekte in (b) und (c) anschaulich zu erklären.

Aufgabe 40: Euler-Relation (Bonus-Aufgabe) (2 Punkte)

In Aufgabe 36 haben Sie bereits die **thermodynamische Fundamentalrelation** oder **Euler-Relation** benutzt: $E = TS - pV + \mu N$. Beweisen Sie diesen Zusammenhang unter Ausnutzung der Extensivität der Entropie.
Hinweis: Benutzen Sie $S(\alpha E, \alpha V, \alpha N) = \alpha S(E,V,N)$ für $\alpha = 1 + \epsilon$ mit $\epsilon \ll 1$.