Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Statistische Physik

Blatt 3

WS 2020/21

Abgabe: Montag, **23.11.2020**, 10:00 Uhr **Besprechung**: Dienstag, 24.11.2020

Webseite: www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2020-StatPhys.shtml

Aufgabe 11: Druck-Gleichgewicht (6 Punkte)

Wir betrachten zwei ideale Gase mit Teilchenzahl N_1 und N_2 und Volumina V_1 und V_2. Diese sind zunächst durch einen wärmedurchlässigen, befestigten Kolben getrennt, sodass sich ein thermisches Gleichgewicht einstellt.

a) Da der Kolben wärmedurchlässig ist, ist nur die Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ konstant. Berechnen Sie die Gesamtentropie des Systems als Funktion von E_1 und maximieren Sie das Ergebnis.

b) Nutzen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabe a) um die Relation $T_1 = T_2$ für allgemeine V_1 und V_2 zu zeigen.
Hinweis: Verwenden Sie die kalorische Zustandsgleichung des idealen Gases.

Nun wird der Kolben gelöst, sodass sich ein neues thermisches Gleichgewicht mit potentiell neuen Temperaturen T_1' und T_2', neuen Drücken p_1', p_2', sowie Volumina V_1' und V_2' einstellt. Bei diesem Prozess bleiben die Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ und das Gesamtvolumen $V = V_1 + V_2$ erhalten.

c) Berechnen Sie die Temperaturen T_1' und T_2' nach Lösung des Kolbens aus der Gesamtenergieerhaltung. Verwenden Sie dazu das Ergebnis aus b).

d) Berechnen Sie die Gesamtentropie des Systems als Funktion von V_1' und maximieren Sie das Ergebnis (es ist $V = V_1' + V_2'$ fest). Nutzen Sie die thermische Zustandsgleichung, um zu zeigen, dass im Gleichgewicht $p_1' = p_2'$ gilt.

e) Beweisen Sie, dass die Entropie im Laufe dieses Prozesses zunimmt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass das Gleichgewicht einem Maximum und nicht etwa einem Minimum der Entropie entspricht.

Aufgabe 12: Satz von Liouville (6 + 2 Punkte)

Ein klassisches System habe die generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ und die dazugehörigen konjugierten Impulse $p_1, \ldots, p_n$, deren Dynamik durch die hamiltonsche Bewegungsgleichungen beschrieben werden. Die klassische **Phasenraumdichte** ist dann eine Funktion dieser Koordinaten und Impulse:

$$\rho(\{p_k(t)\}, \{q_k(t)\}, t). \tag{1}$$

Der **Satz von Liouville** besagt, dass im Gleichgewichtszustand die totale Zeitableitung der Phasenraumdichte verschwindet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\{p_k(t)\}, \{q_k(t)\}, t) = 0. \tag{2}$$

Im Folgenden wollen wir diese Aussage beweisen und numerisch veranschaulichen.

a) Beweisen Sie den Satz von Liouville, indem Sie von der Kontinuitätsgleichung der Phasenraumdichte

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \tag{3}$$

ausgehen. Hier ist $\vec{j} = \vec{v}\rho$, mit $\vec{v} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_N)$, die $2N$-dimensionale Phasenraumstromdichte und $\vec{\nabla} = (\partial_{q_1}, \ldots, \partial_{q_N}, \partial_{p_1}, \ldots, \partial_{p_N})$. Erläutern Sie kurz den physikalischen Unterschied zwischen der totalen Zeitableitung $d\rho/dt$ und der partiellen Zeitableitung $\partial\rho/\partial t$.
Hinweis: Benutzen Sie die hamiltonschen Bewegungsgleichungen um zu zeigen, dass $\partial\dot{q}_i/\partial q_i = -\partial\dot{p}_i/\partial p_i$.

b) Wir haben für Sie ein Notebook vorbereitet, mit dem Sie die Phasenraumdynamik verschiedener physikalischer Systeme untersuchen können. Als Orientierung sind die Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillator bereits gegeben. Lösung und Visualisierung der kanonischen Gleichungen sind ebenfalls vorimplementiert. Erweitern Sie zunächst den Code an der markierten Stelle um die Bewegungsgleichungen eines gedämpften Pendels,

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \tag{4}$$
$$\dot{p} = -\gamma p - Kq. \tag{5}$$

Ein weiteres zu studierendes System hat die Hamiltonfunktion

$$H = \sin(x) + \sin(p). \tag{6}$$

Berechnen Sie auch für dieses Modell die hamiltonschen Bewegungsgleichungen und fügen Sie diese an der dafür vorgesehenen Stelle ein. Untersuchen Sie nun, wie sich ein Ensemble von Teilchen, deren Anfangsbedingungen (x_0, p_0) in einem Kreis mit Radius $r = 5$ im Phasenraum gleichmäßig verteilt sind, verhält. Dazu erweitern Sie den Animationsteil an der gekennzeichneten Stelle um die entsprechenden Anfangsbedingungen. Beschreiben Sie ihre Beobachtungen für die drei Systeme in Hinblick auf die Erfüllung des Satzes von Liouville.

c) **Bonusaufgabe** In Aufgabenteil b) sollte Ihnen aufgefallen sein, dass das Phasenraumvolumen bei der gedämpften Schwingung nicht erhalten ist, sondern sich auf den Punkt $(p, q) = (0, 0)$ zusammengezogen hat. Dies wollen wir hier weiter untersuchen. Berechnen Sie dazu $\partial\dot{q}/\partial q$ und $\partial\dot{p}/\partial p$. Was fällt Ihnen auf? Benutzen Sie das Ergebnis und die Kontinuitätsgleichung, um zu zeigen, dass für ρ die Differentialgleichung $d\rho/dt = \gamma\rho$ gilt. Was bedeutet das für die zeitliche Entwicklung eines Anfangsvolumens $A = \Delta q \Delta p$?

Aufgabe 13: Das 2D Gas – Teil II (Statistik einzelner Teilchen) (3 Punkte)

Nachdem Sie sich in der letzten Woche bereits mit dem Grundgerüst der Simulation des zweidimensionalen Gases vertraut gemacht haben, und bereits erste spezielle Anfangsbedingungen selber implementiert haben, soll es in dieser Woche um die Statistik eines einzelnen Teilchens gehen. Laden Sie sich dazu das Notebook von der Homepage der Vorlesung herunter und bearbeiten Sie die **Aufgabenteile a) und b)**.