Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Statistische Physik

Blatt 4

WS 2020/21

Abgabe: Montag, **30.11.2020**, 10:00 Uhr **Besprechung**: Dienstag, 01.12.2020

Webseite: www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2020-StatPhys.shtml

Aufgabe 14: Reißverschlussmodell für DNA (6 Punkte)

In einem einfachen DNA-Modell werden die Mikrozustände wie folgt festgelegt: Die beiden Stränge können an nummerierten Stellen $j = 1, 2, \ldots, N$ Bindungen eingehen. Eine geschlossene Bindung j hat die Energie $\epsilon_j = 0$, eine geöffnete Bindung die Energie $\epsilon_j = \epsilon$. Die p-te Bindung kann nur dann geöffnet sein, wenn alle Bindungen mit $j < p$ ebenfalls geöffnet sind. Die N-te Bindung ist immer geschlossen.

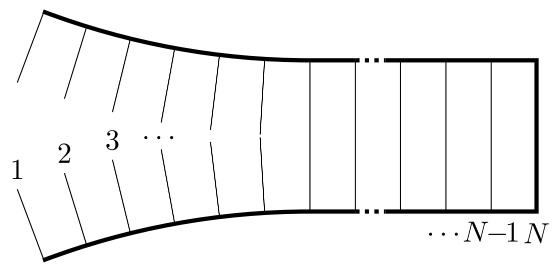

Abbildung 1: Einfaches Reißverschlussmodell für ein DNA-Molekül. Offene Bindungen haben die Energie ϵ, geschlossene die Energie 0.

a) Bestimmem Sie die kanonische Zustandssumme des DNA-Moleküls.
Hinweis: Die Partialsummenformel der geometrischen Reihe ist nützlich.

b) Beweisen Sie den Zusammenhang zwischen dem Erwartungswert der Energie im kanonischen Ensemble und der Zustandssumme $Z(\beta)$:

$$\langle E \rangle_{\text{kanonisch}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} \ln Z(\beta) . \qquad (1)$$

c) Benutzen Sie ihr Ergebnis aus b) um den Erwartungswert der Energie als Funktion von $x = \exp(-\beta\epsilon)$ zu berechnen. Bestimmen Sie anschließend daraus die mittlere Anzahl $\langle n \rangle$ der offenene Bindungen als Funktion von x und skizzieren Sie $\langle n \rangle / N$ für verschiedene Werte von N.

d) In der menschlichen DNA werden etwa 95% der Nukleotide als nichtcodierende DNA oder „junk DNA“ betrachtet, also nur 5 % der DNA codieren tatsächlich Erbinformation für Proteine. Berechnen Sie $\langle n \rangle / N$ für $N >> 1$ als Funktion von x. Diskutieren Sie das Ergebnis bezüglich der biologischen Relevanz der „junk“-Nukleotide für die Funktion der DNA.

e) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2} \ln Z(\beta)$ und drücken Sie das Resultat durch $\langle E \rangle$ und $\langle E^2 \rangle$ aus.

Aufgabe 15: Harmonischer Oszillator (3 Punkte)

Ein **einzelner** quantenmechanischer harmonischer Oszillator befinde sich im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und die Energie $\langle E \rangle$. Lesen Sie aus Ihrem Ergebnis für die Energie die mittlere Besetzungszahl ab.

Aufgabe 16: Zentraler Grenzwertsatz (6 Punkte)

Die Normalverteilung spielt in der statistischen Physik eine sehr prominente Rolle. Das liegt daran, dass Sie immer auftaucht, wenn **Summen unabhängiger Zufallszahlen** betrachtet werden. Die Aussage des **zentralen Grenzwertsatzes** ist, dass solche Summen normalverteilt sind, selbst wenn das für die ursprünglichen Zufallsvariablen nicht gilt. Wir haben Ihnen ein Notebook zur Verfügung gestellt, in dem Sie diese wichtige Eigenschaft für beliebige Verteilungen überprüfen sollen. Lesen Sie sich im Notebook zunächst die Abschnitte *'Konvertieren einer Funktion f zu einer Verteilung p'* und *'Erzeugung von p-verteilten Zufallszahlen' durch.* Dort stellen wir Ihnen die nötigen Werkzeuge zur Verfügung, die Sie brauchen, um Zufallszahlen nach einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung p zu erzeugen. Bearbeiten Sie anschließend die **Aufgabenteile a)** und **b)**.