Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Statistische Physik

Zusatzblatt: Mathematische Grundlagen der Thermodynamik

WS 2020/21

Abgabe: **keine Abgabe** **Besprechung**: optional in den Tutorien
Webseite: www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2020-StatPhys.shtml

Aufgabe 28: Jacobi-Determinante

Die Jacobi-Determinante einer Abbildung $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix}$ ist die Determinante der Jacobi-Matrix, d.h. der Matrix, die alle partiellen Ableitungen enthält:

$$J \equiv \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v & \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \\ \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)_v & \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_u \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_u - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)_v . \tag{1}$$

Bei den partiellen Ableitung wird die Variable, die als Subskript angegeben ist, konstant gehalten.

a) Es seien $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$. Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

(i)
$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \quad \text{(Kettenregel)}, \tag{2}$$

(ii)
$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial f}\right)_v\right]^{-1}, \tag{3}$$

(iii)
$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_f \left(\frac{\partial v}{\partial f}\right)_u = -1. \tag{4}$$

b) Verifizieren Sie diese Eigenschaften explizit am Beispiel der 2D Polarkoordinaten: $f = u^2 + v^2, g = uv, u = r\cos\varphi, v = r\sin\varphi, x = r$ und $y = \varphi$.

c) Die Zustandsgleichung eines Gases, $p = p(V,T)$ sei gegeben. Drücken Sie die **isobare, thermische Volumenausdehnung** β (nicht zu verwechseln mit $\beta = 1/k_BT$) und die **isotherme Kompressibilität** κ_T, mit

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad \text{und} \qquad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{5}$$

durch die partiellen Ableitungen von p nach T und V aus.

Aufgabe 29: Vollständige Differentiale und Zustandsgrößen

Eine Differentialform

$$\mathrm{d}F = f_1(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n = \sum_i^n f_i(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_i \tag{6}$$

nennt man **totales** oder **vollständiges** Differential, wenn eine Funktion F existiert, so dass

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{x_m, m\neq i} \qquad \forall i. \tag{7}$$

In diesem Fall nennt man die Funktion F eine **Zustandsgröße**.

a) Warum ist **Zustandsgröße** ein sinnvoller Name?

b) Geben Sie notwendige Bedingungen für die Ableitungen der Funktionen $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ an, die erfüllt sein müssen, damit Gleichung (6) ein totales Differential ist. Was ergibt sich im Speziellen in drei Dimensionen?

c) Untersuchen Sie, ob $\mathrm{d}F_i$ ein totales Differential darstellt.

(i) $\mathrm{d}F_1 = \cos x \sin y\,\mathrm{d}x - \sin x \cos y\,\mathrm{d}y$

(ii) $\mathrm{d}F_2 = \sin x \cos y\,\mathrm{d}x + \cos x \sin y\,\mathrm{d}y$

(iii) $\mathrm{d}F_3 = x^3 y^2\,\mathrm{d}x - y^3 x^2\,\mathrm{d}y$

d) Ist das Differential $\mathrm{d}F = \mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$ vollständig? Falls ja, berechnen Sie $F(x, y, z)$. Berechnen Sie in jedem Fall das Wegintegral

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} dF \tag{8}$$

für die beiden verschiedenen Wege:

$$\gamma_A : (0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1) \tag{9}$$

$$\gamma_B : (0,0,0) \to (0,0,1) \to (0,1,1) \to (1,1,1) \tag{10}$$

e) Ist das folgende Differential vollständig? Falls ja, berechnen Sie $F(x, y)$.

$$\mathrm{d}F = \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + \ln\left(\frac{x}{y^{\alpha+1}}\right)\mathrm{d}y, \qquad x, y > 0, \alpha = \text{const}. \tag{11}$$

f) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{d}F = \left(\frac{y^2}{x} - 2\right)\mathrm{d}x + \left(3y - \frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y \tag{12}$$

kein totales Differential ist. Wie verhält es sich mit $\mu(x, y)\,\mathrm{d}F$, mit $\mu(x, y) = xy$?

Wie gesehen, kann ein nicht-vollständiges Differential $\mathrm{d}E$ durch Multiplikation mit einem **integrierenden Faktor** μ in ein totales Differential $\mathrm{d}\tilde{E} = \mu\,\mathrm{d}E$ überführt werden, so dass $\tilde{E}$ eine Zustandsgröße ist.

g) Finden Sie den integrierenden Faktor $\mu(x, y)$ für

$$\mathrm{d}E = (xy^2 + xye^x)\,\mathrm{d}x + (2x^2y + xe^x)\,\mathrm{d}y \tag{13}$$

unter der Annahme, dass μ nur von x abhängt. Bestimmen Sie auch $\tilde{E}$.