

Statistische Physik

Blatt 8

Wintersemester 2023/24

Abgabe: Montag, **04.12.2023**, 10:00 Uhr

Besprechung: Dienstag, 05.12.2023

Webseite: <https://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2023-StatPhys.shtml>

Aufgabe 26: Das Bose-Gas, Teil 2: Bose-Einstein-Kondensation (7 Punkte)

In Aufgabe 24 wurde gezeigt, dass das chemische Potential des idealen Bose-Gases $\mu \leq 0$ erfüllen muss. Weiterhin wurde demonstriert, dass sich die Teilchenzahl N über

$$N = \frac{V (2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x z^{-1} - 1}}_{g_{3/2}(z)} \quad (1)$$

berechnen lässt, mit $x = \beta\epsilon$ und der Fugazität $z = \exp(\beta\mu)$.

- a) Die Funktion $g_{3/2}(z)$ wächst als Funktion der Fugazität monoton an. Erklären Sie unter Zuhilfenahme von Gl. (1), warum das bedeutet, dass – bei fester Teilchenzahl N – das chemische Potential $\mu(T)$ bei sinkenden Temperaturen gegen seine obere Schranke laufen muss. Angenommen, diese obere Schranke wird bei einer Temperatur T_c erreicht, was folgt dann aus Gl. (1) für die Teilchenzahl, wenn die Temperatur weiter abgesenkt wird?

Sie sollten festgestellt haben, dass die Teilchenzahl (1) für $T < T_c$ sinkt. Das Problem ist, dass Gl. (1) nicht die Bosonen im Grundzustand ($\epsilon = 0$) berücksichtigt, sondern nur die Anzahl der Bosonen in angeregten Zuständen, N_{ex} , beschreibt.

- b) Begründen Sie, warum der Grundzustand bei der Berechnung von N separat behandelt werden muss. *Hinweis:* Wie wurde Gl. (1) hergeleitet?

Die Anzahl der Teilchen im Grundzustand, N_0 , ist also nicht in Gl. (1) enthalten und muss separat betrachtet werden.

- c) Bei hohen Temperaturen sind nur angeregte Zustände besetzt ($N = N_{\text{ex}}$). Sinkt T , nähert sich μ an 0 an. Dieser Wert wird bei T_c erreicht. Für $T = T_c$ ist der Grundzustand immer noch quasi unbesetzt, $N \approx N_{\text{ex}}$, und Gl. (1) beschreibt die Teilchenanzahl korrekt. Berechnen Sie aus diesen Informationen die kritische Temperatur T_c als Funktion der Teilchendichte $\frac{N}{V}$. Benutzen Sie, dass $g_{3/2}(1) \approx 2.612$.
- d) Jetzt betrachten wir Temperaturen $T \leq T_c$. Zeigen Sie, dass sich für die Besetzung des Grundzustandes $N_0 = N - N_{\text{ex}}$ die Gleichung

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad (2)$$

ergibt. Skizzieren Sie $\frac{N_0}{N}$ für $0 \leq T \leq 2T_c$.

Aufgabe 27: Vollständige Differentiale und Zustandsgrößen (7 Punkte)

In dieser Aufgabe wiederholen wir das Konzept der *totalen Differentiale* und diskutieren den Zusammenhang zu den Zustandsgrößen der Thermodynamik. Eine Differentialform

$$dF = f_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n) dx_n = \sum_i^n f_i(x_1, \dots, x_n) dx_i \quad (3)$$

nennt man *totales* oder *vollständiges* Differential, wenn eine Funktion F existiert, so dass

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{x_m, m \neq i} \quad \forall i. \quad (4)$$

Der zusätzliche Subskript $x_m, m \neq i$ gibt an, welche Variablen bei Bildung der Ableitung konstant zu halten sind. In dieser Aufgabe betrachten wir die folgenden Differentiale:

- (i) $dF_1 = \cos x \sin y dx - \sin x \cos y dy,$
- (ii) $dF_2 = \sin x \cos y dx + \cos x \sin y dy,$
- (iii) $dF_3 = x^3 y^2 dx - y^3 x^2 dy,$
- (iv) $dF_4 = dx + x dy + y dz,$
- (v) $dF_5 = \frac{y}{x} dx + \ln \left(\frac{x}{y^{\alpha+1}} \right) dy, \quad x, y > 0, \alpha = \text{const.},$
- (vi) $dF_6 = \left(\frac{y^2}{x} - 2 \right) dx + \left(3y - \frac{x}{y} \right) dy,$
- (vii) $dF_7 = (xy^2 + xye^x)dx + (2x^2y + xe^x)dy.$

- a) Ist dF vollständig, so nennt man F *Zustandsgröße*. Warum ist dieser Name sinnvoll?
- b) Geben Sie notwendige Bedingungen für die Ableitungen der Funktionen $f_i(x_1, \dots, x_n)$ an, die erfüllt sein müssen, damit Gleichung (3) ein totales Differential ist. Was ergibt sich im Speziellen in drei Dimensionen?
- c) Welche der Differentiale dF_1, dF_2 und dF_3 sind vollständig?
- d) Ist dF_4 vollständig? Berechnen Sie das Wegintegral $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} dF_4$ für die beiden Wege:

$$\gamma_A : \vec{a} = (0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow \vec{b} = (1, 1, 1) \quad (5)$$

$$\gamma_B : \vec{a} = (0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow \vec{b} = (1, 1, 1) \quad (6)$$

- e) Ist das Differential dF_5 vollständig? Falls ja, berechnen Sie $F_5(x, y)$.
- f) Ist dF_6 vollständig? Wie verhält es sich mit $\mu(x, y)dF_6$, mit $\mu(x, y) = xy$?
- g) Offenbar kann ein nicht-vollständiges Differential dF durch Multiplikation mit einem *integrierenden Faktor* μ in ein totales Differential $d\tilde{F} = \mu dF$ überführt werden, so dass \tilde{F} eine Zustandsgröße ist. Finden Sie den integrierenden Faktor $\mu(x, y)$ für dF_7 unter der Annahme, dass μ nur von x abhängt. Bestimmen Sie auch \tilde{F} .

Aufgabe 28: Wärme als unvollständiges Differential (6 Punkte)

Wir kennzeichnen nicht-vollständige Differentiale ab jetzt mit der Notation \tilde{d} . Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet dann

$$dE = \tilde{d}Q - pdV. \quad (7)$$

- a) Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0 \quad (8)$$

gelten müsste, falls $\tilde{d}Q$ ein totales Differential wäre. Ersetzen Sie dafür in Gleichung (7) das totale Differential von $E(T, V)$. Begründen Sie mit der thermischen Zustandsgleichung des idealen Gases, warum die Aussage von Gleichung (8) nicht gelten kann.

- b) Für die partiellen Ableitungen der Energie eines idealen Gases nach T und V gilt

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = C_V = \text{const}. \quad (9)$$

Benutzen Sie Gleichung (9), um $\tilde{d}Q$ in der Form $\tilde{d}Q = a dT + b dV$ zu schreiben. Bestimmen Sie a und b . Berechnen Sie anschließend einen integrierenden Faktor $\mu(T)$, so dass $d\tilde{Q} = \mu(T)\tilde{d}Q$ ein totales Differential ist. Berechnen und interpretieren Sie \tilde{Q} .