Vorlesung: Klassische Theoretische Physik I

M. Zirnbauer
Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Sommersemester 2015

Contents

1 Newtonsche Mechanik **3**

1.1 Affine und Euklidische Räume . . . 3
1.2 Galilei-Raum-Zeit . . . 5
1.3 Galilei-Transformationen . . . 8
1.4 Newtonsches Bewegungsgesetz . . . 11
1.5 Galileisches Relativitätsprinzip . . . 12
1.6 Erhaltungssätze im abgeschlossenen N-Körpersystem . . . 15
1.6.1 Impuls- und Schwerpunktsatz . . . 15
1.6.2 Drehimpulssatz . . . 16
1.6.3 Energiesatz . . . 18
1.7 Hamiltonsche Systeme . . . 19
1.8 Autonome Hamiltonsche Systeme mit einem Freiheitsgrad . . . 22
1.9 Das Zweikörper-Problem mit Zentralkräften . . . 26
1.9.1 Abtrennen der Schwerpunktbewegung . . . 26
1.9.2 Invariante Ebene der Relativbewegung . . . 27
1.9.3 Reduktion auf Radialbewegung . . . 28
1.9.4 Untersuchung der Bahnkurven . . . 29
1.9.5 Kepler-Problem . . . 30

2 Starre Körper **32**

2.1 Exkurs über die Drehgruppe . . . 32
2.1.1 Infinitesimale Drehungen in 3 Dimensionen . . . 35
2.1.2 Eigentliche Drehungen in 3 Dimensionen . . . 36
2.2 Kinematik starrer Körper: Winkelgeschwindigkeit . . . 38
2.3 Kinematik: Trägheitstensor . . . 40
2.4 Der freie Kreisel: geometrische Konstruktion . . . 44
2.5 Die Eulerschen Gleichungen . . . 45

2.5.1 Kräftefreier symmetrischer Kreisel . . . 47
2.6 Unsymmetrischer Kreisel . . . 49

3 Kleine Schwingungen **51**
3.1 Gleichgewichtslagen . . . 51
3.2 Stabilität von Gleichgewichtslagen . . . 52
3.3 Linearisierung . . . 52
3.4 Normalschwingungen . . . 53
3.5 Beispiel: Gekoppelte Pendel . . . 56

4 Networks **58**
4.1 Chains on 1-complexes . . . 58
4.2 Cochains and coboundary operator . . . 59
4.3 2-complexes: $d \circ d = 0$ . . . 62
4.4 Resistive networks . . . 64
4.5 Capacitive networks . . . 68
4.5.1 Math tutorial: quotient of vector spaces . . . 73
4.5.2 Math tutorial: annihilator space . . . 73
4.6 Boundary-value problems . . . 74

5 Elektrostatik
5.1 Grundgesetze
5.2 Zusammenhang mit kapazitiven Netzwerken
5.3 Hodge – Sternoperator
5.4 Elektrisches Feld einer Punktladung
5.5 Anschlussbedingungen an einer Grenzfläche
5.6 Messvorschrift für D
5.7 Poisson-Gleichung & Laplace-Operator
5.8 Multipolentwicklung (kartesisch)
5.9 Randwertaufgaben
5.9.1 Greensche Funktion
5.9.2 Greensche Identitäten
5.9.3 Bildladungsmethode für U = Kugel
5.10 Energiebetrachtungen

Literatur:

F. Scheck, *Mechanik*, Springer-Verlag (1988)

N. Straumann, *Klassische Mechanik*, Lecture Notes in Physics, vol. 289, Springer (1987)

V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag (1978)

1 Newtonsche Mechanik

1.1 Affine und Euklidische Räume

In Vorbereitung des Galilei-Modells der Raum-Zeit erinnern wir an die Begriffe des affinen Raums und des Euklidischen Vektorraums.

Definition. Sei M eine Menge, V ein reeller Vektorraum und

$$+ : \ M \times V \to M, \quad (p, v) \mapsto p + v$$

eine Abbildung. Dann heißt das Tripel $(M, V, +)$ ein *affiner Raum*, wenn die folgenden Axiome gelten:

(i) $p + (v + w) = (p + v) + w$ (für alle $p \in M$ und $v, w \in V$).

(ii) Zu jedem Paar $(p, q) \in M \times M$ existiert genau ein Vektor $v \in V$ mit $p = q + v$.

Die Elemente von M heißen Punkte. Wir schreiben $p - q := v$ und nennen $p - q$ den Differenzvektor zum Punktepaar (p, q). Unter der Dimension von M versteht man die Dimension von V.

Bemerkung 1. Man beachte, dass hier zwei Operationen "+" im Spiel sind. Im Fall von $v + w$ meint das Pluszeichen die Addition zweier Vektoren des Vektorraums V. Dagegen steht das Pluszeichen in $p + v$ für die Addition des Vektors v zum Punkt p, wodurch ein neuer Punkt $p + v$ bestimmt wird. Das Axiom (i) besagt, dass die beiden Additionen im Sinne von Assoziativität miteinander verträglich sind. (Übrigens ist Addition von Punkten nicht erklärt.)

Bemerkung 2. Man kann V als Translationsgruppe auffassen und $+ : \ M \times V \to M$ als die Wirkung der Translationsgruppe V auf den Punkteraum M. Addition von v zu p bedeutet dann Translation des Punkts p um den Vektor v.

Beispiel. Die Menge aller Punkte in einer Ebene (des physikalischen Ortsraums) zusammen mit dem Vektorraum aller Translationen in dieser Ebene bildet einen 2-dimensionalen affinen Raum.

Aufgabe. Folgere aus den Axiomen (i) und (ii), dass für jedes Tripel von Punkten (p, q, o) eines affinen Raumes gilt:

$$p - q = (p - o) - (q - o).$$

Affine Abbildungen. Ein Abbildung $f : \ M \to N$ zwischen affinen Räumen heißt affin, wenn sie affine Unterräume auf affine Unterräume abbildet. Das Bild eines Punkts, einer Geraden, einer Ebene usw. unter einen affinen Abbildung ist also wieder ein Punkt bzw. eine Gerade bzw. eine Ebene usw. (wobei Entartung zugelassen ist). Jede affine Abbildung $f : \ M \to N$ hat die Form

$$f(p) = f(o) + L(p - o).$$

Hierbei ist o irgendein ausgewählter Punkt (z.B. der Koordinatenursprung; siehe unten) und $L = D_o f = D_p f$ das ortsunabhängige Differential von f. Diese lineare Abbildung L zwischen den Differenzvektorräumen zu M und N wird der lineare Teil von f genannt.

Definition. Der reelle Vektorraum V sei jetzt mit einer Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \; V \times V \to \mathbb{R}$$

ausgestattet. Eine solche Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt ein *Euklidisches Skalarprodukt*, wenn sie bilinear, symmetrisch und positiv definit ist. Ein Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Euklidischem Skalarprodukt heißt Euklidisch. In einem Euklidischen Vektorraum existiert eine kanonische Norm,

$$|v| := +\sqrt{\langle v, v \rangle}\,.$$

Man nennt $|v|$ die Länge des Vektors v. Der Winkel $\angle(u, v)$ zwischen zwei Vektoren u, v ist erklärt durch

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u|\,|v|}\,.$$

Zwei Vektoren u, v mit der Eigenschaft $\langle u, v \rangle = 0$ heißen zueinander senkrecht oder orthogonal.

Affine Koordinaten. Nach dieser Erinnerung an grundlegende Strukturen wiederholen wir ein paar Aussagen zum praktischen Rechnen. Für unsere Zwecke sind Koordinaten x_i immer Funktionen

$$x_i : \; M \to \mathbb{R}$$

von dem Raum, für den sie als Koordinaten fungieren, in die reellen Zahlen. Jede Koordinate x_i hat als Funktion ein wohldefiniertes Differential $\mathrm{d}x_i : \; M \to V^*$, $p \mapsto (\mathrm{d}x_i)_p$.

Für das Rechnen in einem affinen Raum $(M, V, +)$ eignen sich sogenannte affine Koordinaten. Man erhält solche, indem man einen speziellen Punkt, den sog. Koordinatenursprung $o \in M$, auszeichnet und eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ des n-dimensionalen Vektorraums V festlegt. Mit diesen Daten werden die affinen Koordinaten $x_1(p), \ldots, x_n(p)$ des Punkts p (also die Werte der Funktionen $x_i : \; M \to \mathbb{R}$ auf p) durch die Gleichung

$$p = o + (p - o) = o + \sum_{i=1}^{n} x_i(p)\, e_i$$

bestimmt. Ändert man das affine Koordinatensystem $\{o; e_1, \ldots, e_n\}$, so ändern sich die zugehörigen affinen Koordinaten x_i. Die Koordinatendifferentiale $\mathrm{d}x_i$ sind von der Wahl von o unabhängig.

Aufgabe. Für einen affinen Raum $(M, V, +)$ seien zwei affine Koordinatensysteme gegeben, nämlich $\{o; e_1, \ldots, e_n\}$ und $\{o'; e'_1, \ldots, e'_n\}$, mit entsprechenden affinen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $x'_1, \ldots, x'_n$. Es existiert dann eine affine Abbildung $f : \; M \to M$ mit der Eigenschaft $f(o) = o'$ und $(D_p f)(e_i) = e'_i$ (für alle $p \in M$). Die affinen Koordinaten hängen zusammen über

$$x_i = f^* x'_i \equiv x'_i \circ f.$$

Für $o' = o + \sum_i s_i e_i$ und $e'_j = \sum_i e_i L_{ij}$ folgt die explizite Umrechnungsformel

$$x_i = s_i + \sum_j L_{ij}\, x'_j\,, \quad \mathrm{d}x_i = \sum_j L_{ij}\, \mathrm{d}x'_j\,.$$

Kartesische Koordinaten. Sei nun $(M, V, +)$ ein Euklidischer Raum, d.h. ein affiner Raum mit Euklidischem Differenzvektorraum V. In dieser Situation versteht man unter einem Satz kartesischer Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ affine Koordinaten $x_i : M \to \mathbb{R}$ mit der speziellen Eigenschaft, dass die Basisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ des zugrunde liegenden affinen Koordinatensystems eine Orthonormalbasis bilden:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \,,$$

also aufeinander senkrecht stehen und alle die Länge Eins haben.

In einem Euklidischen Raum hat man einen Begriff von Abstand zwischen zwei Punkten:

$$d(p, q) := |p - q| = \sqrt{\langle p - q, p - q \rangle}.$$

In kartesischen Koordinaten x_i wird der Abstand $d : M \times M \to \mathbb{R}$ durch

$$d(p, q) = \sqrt{\sum\nolimits_i (x_i(p) - x_i(q))^2}$$

ausgedrückt. Aus der Koordinatenunabhängigkeit des Abstands folgt, dass die Matrix L_{ij} für den Wechsel zwischen kartesischen Koordinaten x_i und x'_i den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} L_{ij} L_{il} = \delta_{il}$$

unterliegt. Solche Matrizen heißen orthogonal. Sie bilden die orthogonale Gruppe O_n.

1.2 Galilei-Raum-Zeit

In der (nicht-relativistischen) klassischen Mechanik modelliert man die Struktur von Raum und Zeit durch die sogenannte Galilei-Raum-Zeit. Dieses mathematische Modell taugt, solange die Lichtgeschwindigkeit c als unendlich groß betrachtet werden kann, also für den Zweck der Beschreibung physikalischer Vorgänge mit im Vergleich zu c sehr kleinen Geschwindigkeiten. Das Galilei-Modell wird verbessert durch das Minkowski-Modell der speziellen Relativitätstheorie und schließlich, in Anwesenheit sehr starker Gravitation, durch das dynamische Raum-Zeit-Modell der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein.

Definition. Unter dem Galilei-Modell der Raum-Zeit (kurz: *Galilei-Raum-Zeit*) verstehen wir einen 4-dimensionalen affinen Raum $(M, V, +)$ mit zwei besonderen Eigenschaften:

(i) Auf V existiert eine ausgezeichnete Linearform τ, die *absolute Zeit.*

(ii) Der Untervektorraum $V_0 = \{v \in V \mid \tau(v) = 0\}$ aller *Raum-Translationen* ist Euklidisch.

Die folgenden Erläuterungen sollen aufzeigen, was in dieser Definition steckt.

Gleichförmig geradlinige Bewegung. Affine Räume $(M, V, +)$ enthalten affine Unterräume. Die affinen Unterräume der Dimension 1 sind Geraden:

$$\gamma : \mathbb{R} \to M, \quad s \mapsto A + sv \quad (v \in V). \tag{1.1}$$

Im Fall der Galilei-Raum-Zeit hat jede solche Gerade (für $\tau(v) \neq 0$) die physikalische Interpretation einer gleichförmig geradlinigen (oder unbeschleunigten) Bewegung. Der Begriff der gleichförmig geradlinigen Bewegung ist im Galilei-Modell also invariant (d.h. koordinatenfrei) erklärt und somit physikalisch sinnvoll. Zu seiner Definition – darauf sei hier explizit hingewiesen – wird weder die absolute Zeit τ noch das Euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ benötigt.

Trägheitsgesetz. Die affine Struktur der Galilei-Raum-Zeit gestattet es, das 1. Newtonsche Gesetz (auch Trägheitsgesetz genannt) koordinatenfrei zu formulieren:

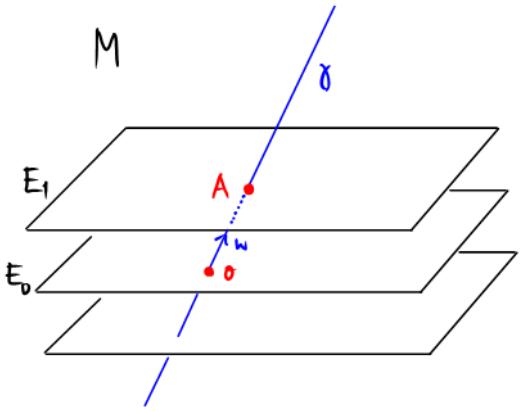
$$\boxed{\text{Kräftefreie Bewegung ist gleichförmig geradlinig.}} \tag{1.2}$$

In Vorbereitung auf die nächsten Überlegungen fügen wir hier noch an, dass jedem Paar von Punkten $(A, B) \in M \times M$ eine (bis auf Reparametrisierung) eindeutige Gerade $\gamma_{B,A} : \mathbb{R} \to M$ zugeordnet ist. Mit der Konvention $\gamma_{B,A}(0) = A$ und $\gamma_{B,A}(1) = B$ wird sie parametrisiert durch

$$\gamma_{B,A}(s) = A + s(B - A). \tag{1.3}$$

Absolute Zeit. Die "Punkte" der Galilei-Raum-Zeit sind natürlich Ereignisse oder Weltpunkte, die durch die Angabe von Ort und Zeit spezifiziert werden. Die Anwendung der Linearform τ auf den Differenzvektor $A - B$ zweier Ereignisse $A, B \in M$ ergibt die objektive (d.h. vom Beobachter unabhängige) Zeitdifferenz zwischen A und B.

Mittels der absoluten Zeit τ wird die Galilei-Raum-Zeit in 3-dimensionale affine Unterräume E eingeteilt, in denen jeweils alle gleichzeitigen Ereignisse zusammengefasst sind. Man nennt jeden solchen Unterraum E auch ein Blatt der durch τ gegebenen Blätterung der Galilei-Raum-Zeit.



Durch die Wahl (irgend-)einer Geraden, sagen wir $\gamma : \mathbb{R} \to M$, $s \mapsto o + sw$, erhalten wir eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz $(s \leftrightarrow E_s)$ zwischen $\mathbb{R}$ und der entsprechenden Blätterung durch

$$E_s := \{A \in M \mid \tau(A - o - sw) = 0\}. \tag{1.4}$$

Per Definition von E_s gilt $A - B \in V_0$ für $(A, B) \in E_s \times E_s$. Somit hat jeder affine Unterraum $E_s \subset M$ den Vektorraum V_0 als Differenzvektorraum, und das auf V_0 gegebene Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stattet jedes Blatt $(E_s, V_0, +)$ mit der Struktur eines 3-dimensionalen Euklidischen Raumes aus, d.h. die Operationen von Längen- und Winkelmessung sind auf jedem E_s erklärt. All diese

Blätter sind isomorph (d.h. identische Kopien voneinander), allerdings nicht kanonisch isomorph, wie wir jetzt ausführen werden.

Äther & absoluter Raum. Motiviert durch die Entdeckung elektromagnetischer Wellen (und der Frage nach einem Medium, worin sich diese ausbreiten könnten, so wie es Druckwellen in einer Flüssigkeit tun) diskutierten Physiker in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts die mögliche Existenz einer "Ur-Flüssigkeit", des sogenannten Äthers. Obschon die Äther-Idee nach experimenteller und theoretischer Falsifizierung verworfen wurde, soll hier gleichwohl angedeutet werden, welche Konsequenzen die Existenz eines Äthers für die Galilei-Raum-Zeit hätte.

Gäbe es den Äther und seine Konstituenten, dann hätte man mit den Weltlinien der Äther-Teilchen eine ausgezeichnete Form von gleichförmig geradliniger Bewegung (und somit einen Begriff von absoluter Ruhe). Die Geradenschar der Äther-Weltlinien gäbe der Galilei-Raum-Zeit eine zweite, räumliche Blätterung (neben der zeitlichen Blätterung durch τ): jede Äther-Weltlinie wäre eine Gerade von Weltpunkten oder Ereignissen, die am gleichen Ort stattfinden.

Die räumliche Blätterung durch den Äther würde es auch ermöglichen, jeder gleichförmig geradlinigen Bewegung in invarianter Weise eine Geschwindigkeit zuzuordnen. Das könnten wir dadurch bewerkstelligen, dass wir eine Projektionsabbildung σ einführen:

$$\sigma : \; V \to V_0 \,, \quad v \mapsto v - u\,\frac{\tau(v)}{\tau(u)}, \tag{1.5}$$

wobei $0 \neq u \in V$ irgendein Generator der Schar von Äther-Weltlinien ist. Mit dieser Projektion würden wir dann der gleichförmig geradlinigen Bewegung $\gamma_{B,A}$ durch A und B die Geschwindigkeit

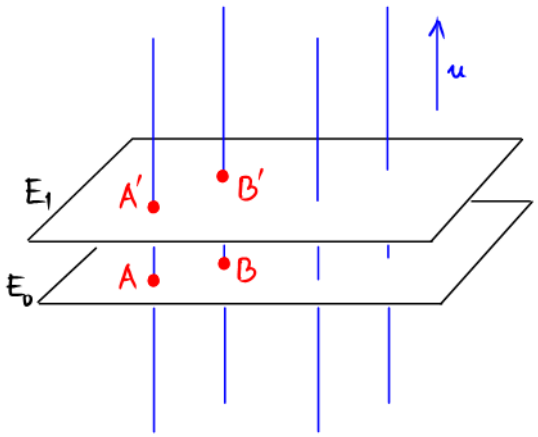
$$v = \sigma(B - A)/\tau(B - A) \tag{1.6}$$

zuweisen. v hätte die physikalische Bedeutung von Geschwindigkeit *relativ zum Äther*.

Schließlich ergäbe der in absoluter Ruhe befindliche Äther einen kanonischen Isomorphismus

$$E_s \to E_{s'} \,, \quad A \mapsto A + u\,\frac{s' - s}{\tau(u)} \tag{1.7}$$

zwischen jedem Paar von Blättern E_s und $E_{s'}$ der zeitlichen Blätterung durch τ.



Kein Äther. Nach diesem gedanklichen Ausflug kehren wir zur physikalischen Realität zurück. In der Physik ist man sich heute einig, dass (i) der Äther nicht existiert, (ii) kein Zustand absoluter Ruhe ausgezeichnet ist und (iii) jeder gleichförmig geradlinigen Bewegung nur eine vom

Bezugssystem abhängige Geschwindigkeit zugeordnet werden kann. Diese Einigkeit beruht u.a. auf der Erkenntnis, dass das Galilei-Modell letztendlich durch die Relativitätstheorie zu ersetzen ist (wobei aber mit dem absoluten Raum gleich auch noch die absolute Zeit abgeschafft wird).

1.3 Galilei-Transformationen

Das Thema dieses Abschnitts ist eine spezielle Klasse von Abbildungen $g:\ M \to M$ der Galilei-Raum-Zeit auf sich. Diese Klasse wird dadurch charakterisiert, dass ihre Elemente die invariant erklärten Strukturen der Galilei-Raum-Zeit – nämlich die affine Struktur $+$, die absolute Zeit τ und die Euklidische Geometrie $\langle\cdot,\cdot\rangle$ von V_0 – invariant lassen. Solche Abbildungen g heißen *Galilei-Transformationen.* In den folgenden Absätzen werden wir sie näher beschreiben.

1. Invarianz der affinen Struktur. Wie oben erläutert wurde, ist das Galilei-Modell der Raum-Zeit mit einer invariant erklärten affinen Struktur ausgestattet. Als strukturerhaltende Abbildungen haben Galilei-Transformationen $g: M \to M$ alle affinen Unterräume von M wieder auf ebensolche abzubilden. Insbesondere müssen gleichförmig geradlinige Bewegungen (kurz: Geraden in M) wieder in ebensolche überführt werden. Jede Galilei-Transformation ist also affin.

Wie wir schon wissen, lässt sich jede affine Abbildung $g:\ M \to M$ in der Form

$$g(p) = g(o) + L(p-o) \qquad (o \in M \ \text{ beliebig, aber fest gewählt}) \tag{1.8}$$

ausdrücken. Hierbei ist $L:\ V \to V$ das Differential $L = D_\bullet g$ von g.

Aufgabe. Zeige, dass das Bild einer Ebene

$$S:\ \mathbb{R}^2 \to M, \quad (s,t) \mapsto p + su + tv \quad (u, v \in V), \tag{1.9}$$

unter $g(\bullet) = g(o) + L(\bullet - o)$ wieder eine Ebene ist.

2. Invarianz von τ. Im Unterschied zu allgemeinen affinen Abbildungen unterliegen Galilei-Transformationen g zweitens der Forderung, dass sie die absolute Zeit τ (und somit auch die durch τ gegebene Blätterung der Galilei-Raum-Zeit) invariant lassen. Zwei Ereignisse A und B mit dem zeitlichen Abstand $\tau(B-A)$ werden also auf zwei Ereignisse $g(A)$ und $g(B)$ mit der gleichen Zeitdifferenz $\tau(g(B)-g(A)) = \tau(B-A)$ abgebildet. In Formeln gilt (mit dem Hinweis, dass τ als Linearform auf V nicht mit g sondern dem Differential L von g zu transformieren ist):

$$L^*\tau \equiv \tau \circ L = \tau. \tag{1.10}$$

Insbesondere ändert sich die Äquivalenzrelation der Gleichzeitigkeit von Ereignissen nicht, und jede Raumtranslation $v \in V_0$ bleibt eine Raumtranslation $Lv \in V_0$, also

$$LV_0 \subset V_0\,. \tag{1.11}$$

Warnung. In Vorschau auf die Lorentz-Transformationen des Minkowski-Modells der speziellen Relativitätstheorie ersetzen die Lehrbücher oft $L^*\tau = \tau$ durch die schwächere Bedingung $L^*\tau^2 =$

τ^2, also $L^*\tau = \pm\tau$. Man erlaubt somit, dass Galilei-Transformationen die Zeitrichtung umkehren. Ohne großen Verlust verzichten wir hier auf diese Allgemeinheit und arbeiten nur mit dem orthochronen Teil der Galilei-Gruppe (ohne Zeitumkehr).

3. Invarianz von $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Wegen $LV_0 \subset V_0$ ist die eingeschränkte Abbildung $R \equiv L|_{V_0}$ eine lineare Abbildung $R: V_0 \to V_0$. Die dritte und letzte Forderung an Galilei-Transformationen lautet, dass die durch $\langle\,,\,\rangle$ gegebene Euklidische Geometrie invariant bleibt. Man verlangt demnach

$$\langle Rv, Rv'\rangle = \langle v, v'\rangle \qquad (\text{für alle } v, v' \in V_0), \tag{1.12}$$

woraus folgt, dass R eine orthogonale Transformation (oder Drehung) von V_0 ist.

Resumée. Wir fassen kurz zusammen. 1) Jede Galilei-Transformation $g: M \to M$ ist eine affine Abbildung. 2) Der lineare Teil $L = D_\bullet g$ transformiert den Unterraum $V_0 \subset V$ räumlicher Translationen in sich. 3) Der eingeschränkte lineare Teil $R = L|_{V_0}$ ist eine Drehung.

Aufgabe. Zeige, dass die Menge der Galilei-Transformationen eine Gruppe bildet. □

Um den Ausdruck für Galilei-Transformationen weiter aufzuschlüsseln, benötigen wir eine Raum-Zeit-Zerlegung, d.h. eine Zerlegung von V in V_0 und einen zu V_0 komplementären Vektorraum V_1 der Dimension Eins. Leider gibt es keine kanonische Wahl von V_1. (Beachte: da das Euklidische Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zwar auf dem Vektorraum V_0 der Raum-Translationen invariant erklärt ist, nicht aber auf dem Vektorraum V aller Raum-Zeit-Translationen, haben wir keine Handhabe für die Konstruktion eines orthogonalen Komplements von V_0 in V. Abhilfe würde hier der Äther schaffen ...) Um weiter zu kommen, müssen wir irgendein V_1 willkürlich auswählen. Wir setzen $V_1 = \mathbb{R}v$ für ein beliebiges, aber festes $v \in V$ mit $\tau(v) \neq 0$ und schreiben

$$V = V_0 \oplus V_1 \quad \text{(direkte Summe)}. \tag{1.13}$$

Physikalisch gesprochen bedeutet die willkürliche Wahl von V_1 die Entscheidung für ein Bezugssystem; genauer: die Auszeichnung einer gleichförmig geradlinigen Bewegung mit Weltrichtung v.

Durch die Wahl (1.13) wird der lineare Teil $L: V \to V$ der Galilei-Transformation in vier Stücke zerlegt:

$$L\big|_{V_0\to V_0} = R\,, \quad L\big|_{V_0\to V_1} = \mathbf{0}\,, \quad L\big|_{V_1\to V_0} =: w, \quad L\big|_{V_1\to V_1} = 1. \tag{1.14}$$

Die letzte (wie die zweite) Gleichung ist eine Konsequenz von $L^*\tau = \tau$. In Blockform haben wir

$$L = \begin{pmatrix} R & w \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Untergruppen. Für den späteren Gebrauch seien hier zwei ausgesuchte Untergruppen der Galilei-Gruppe erwähnt. (i) Die Gruppe Euklidischer Bewegungen g (kurz: *Euklidische Gruppe*) ergibt sich durch die Einschränkung $w \equiv \mathbf{0}$ und die Forderung, dass g jedes Blatt der τ-Blätterung in sich transformiert (also nur Raumtranslationen zugelassen sind). (ii) Die Wahl $R \equiv \mathrm{Id}_{V_0}$ zusammen mit der Forderung $g(o) = o$ definiert die Untergruppe *spezieller* Galilei-Transformationen.

Nach der Präsentation der Galilei-Gruppe und zweier Untergruppen aus invarianter Sicht wenden wir uns nun der Beschreibung in Koordinaten zu. Sei dazu $x_0, x_1, x_2, x_3 : M \to \mathbb{R}$ ein Satz von Koordinatenfunktionen. Wir können den Effekt einer Galilei-Transformation g rechnerisch erfassen, indem wir sie auf die Koordinaten (anstelle des Ereignisraums M) anwenden. Bekanntlich geht jede Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ (so auch jede Koordinatenfunktion) unter einer Abbildung $g : M \to M$ in ihren durch $(g^*f)(p) := f(g(p))$ definierten Pullback g^*f über. Wir betrachten jetzt also

$$g^* x_\mu = x_\mu \circ g \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3). \tag{1.16}$$

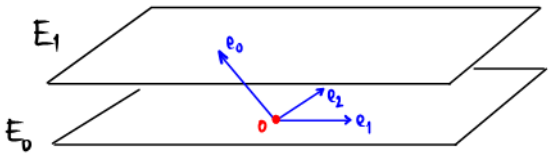
Für die Konkretisierung von $g^* x_\mu$ mittels der oben etablierten Eigenschaften von g ist es geschickt, gut angepasste Koordinaten zu verwenden. Hierzu zunächst eine Vorbereitung.

Definition. Wir nennen ein affines Koordinatensystem $\{o; e_0, e_1, e_2, e_3\}$ von $(M, V, +)$ ein Galilei-System, wenn die folgenden Zusatzeigenschaften erfüllt sind:

(i) $\tau(e_0) = 1, \quad \tau(e_1) = \tau(e_2) = \tau(e_3) = 0,$

(ii) $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3).$

In Worten: die drei Vektoren e_1, e_2, e_3 sind Raumtranslationen und bilden eine Orthonormalbasis von V_0. Der vierte Basisvektor e_0 bewirkt eine Translation der Zeit um eine Zeiteinheit.



Bemerkung. Die Wahl von e_0 bestimmt eine Raum-Zeit-Zerlegung $V = V_0 \oplus \mathbb{R}e_0$. □

Wir wählen unsere Raum-Zeit-Koordinaten x_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ jetzt als die affinen Koordinaten eines Galilei-Systems, und wir setzen $Re_j = \sum_i e_i R_{ij}$ und $(Le_0)|_{V_0} = \sum_i w_i e_i$. Zudem bemerken wir, dass gilt $(\mathrm{d}x_0)_\bullet = \tau$. Mit $(g^*\mathrm{d}x_\mu)_\bullet = L^*(\mathrm{d}x_\mu)_\bullet$ folgen dann aus (1.14) die Gleichungen

$$g^*\mathrm{d}x_0 = \mathrm{d}x_0\,, \quad g^*\mathrm{d}x_i = \sum_j R_{ij}\,\mathrm{d}x_j + w_i\,\mathrm{d}x_0\,. \tag{1.17}$$

Integration dieser differentiellen Beziehungen führt zum Ergebnis

$$g^* x_0 = x_0 + a_0\,, \quad g^* x_i = \sum_j R_{ij}\,x_j + w_i\,x_0 + a_i\,. \tag{1.18}$$

Die physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten $a_\mu \in \mathbb{R}$ erschließt sich aus

$$x_\mu(g(o)) = (g^* x_\mu)(o) = a_\mu\,. \tag{1.19}$$

Die Zahlen a_μ sind also die Koordinaten (im gewählten Galilei-System x_μ mit Koordinatenursprung o) des Galilei-transformierten Weltursprungs $g(o)$. Anders ausgedrückt ist a_i (bzw. a_0) die durch g bewirkte Raumtranslation (bzw. Zeittranslation) von o in Richtung von e_i (bzw. e_0).

1.4 Newtonsches Bewegungsgesetz

Bisher haben wir mit dem vollen Galilei-Modell der 4-dimensionalen affinen Raum-Zeit gearbeitet und die Nichtexistenz des Äthers und einer kanonischen Raum-Zeit-Zerlegung stark betont. Um die weitere Behandlung transparent zu gestalten, rücken wir von dieser umfassenden (und letztendlich zu anstrengenden) Gesamtschau ab und lassen uns auf eine konkrete Raum-Zeit-Zerlegung ein. Wir treffen jetzt also irgendeine feste Wahl $V = V_0 \oplus \mathbb{R}e_0$. Außerdem fixieren wir ein Blatt E_0 der τ-Blätterung der Galilei-Raum-Zeit M und erklären dieses Blatt zur Standardkopie des dreidimensionalen Euklidischen Raumes: $E_3 \equiv (E_0, V_0, +, \langle\cdot,\cdot\rangle) \subset M$. Mit diesen Festlegungen haben wir dann einen Isomorphismus

$$E_3 \times \mathbb{R} \to M, \quad (p,t) \mapsto p + te_0\,. \tag{1.20}$$

Über diesen Isomorphismus entsorgen wir M und arbeiten fortan nur noch mit dem Raum-Zeit-zerlegten Galilei-Modell $E_3 \times \mathbb{R}$. Dabei kommt uns zustatten, dass wir den Ausdruck für Galilei-Transformationen nach erfolgter $(E_3 \times \mathbb{R})$-Zerlegung bereits kennen; siehe (1.14) und (1.18).

Bewegung im E_3. Unter einer *Bewegung* eines Punktes (d.h. eines ausdehnunglosen Körpers) versteht man primär eine differenzierbare Kurve

$$\Gamma :\ \mathbb{R} \to E_3 \times \mathbb{R} \simeq M\,, \quad s \mapsto (p(s), t(s)). \tag{1.21}$$

Jedoch ist diese Formulierung für diesen meisten Zwecke noch unnötig aufwändig. Um es einfacher zu machen, identifizieren wir nach Reparametrisierung $p(s) \equiv \gamma(t(s))$ die Zeitkoordinate t mit s und schreiben

$$\gamma :\ \mathbb{R} \to E_3\,, \quad t \mapsto \gamma(t). \tag{1.22}$$

So erhält der Kurvenparameter t die konkrete Bedeutung der physikalischen Zeit.

Die *Geschwindigkeit* der Bewegung des Punktes ist dann die erste Zeitableitung

$$\dot\gamma :\ \mathbb{R} \to V_0\,, \quad t \mapsto \frac{d\gamma}{dt}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\,, \tag{1.23}$$

und die *Beschleunigung* der Punktbewegung ist die zweite Zeitableitung

$$\ddot\gamma :\ \mathbb{R} \to V_0\,, \quad t \mapsto \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h) - 2\gamma(t) + \gamma(t-h)}{h^2}\,. \tag{1.24}$$

Das Bild von γ in E_3 heißt auch die *Trajektorie* der Bewegung.

N-Körpersystem. Im Nachfolgenden betrachten wir ein System von N punktförmigen Körpern (oder realistischer: von Körpern mit vernachlässigbar kleiner Ausdehnung; kurz: Punkten), die miteinander wechselwirken, also Kräfte aufeinander ausüben. Wir indizieren die Punkte durch $i = 1, 2, \ldots, N$ und bezeichnen die Masse des i-ten Punkts mit m_i; die Bewegung desselben sei durch eine Kurve $\gamma_i :\ \mathbb{R} \to E_3$ gegeben. Die Bewegung des Gesamtsystems ist dann die Abbildung

$$\mathbb{R} \to E_3 \times E_3 \times \cdots \times E_3 \equiv (E_3)^N, \quad t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_N(t)). \tag{1.25}$$

Newtonsches Bewegungsgesetz. Für den Fall des eben eingeführten N-Körpersystems lautet das 2. Newtonsche Gesetz (auch Bewegungsgesetz genannt):

$$m_i\langle\ddot{\gamma}_i(t), \bullet\rangle = F_i(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_N(t), \dot{\gamma}_1(t), \ldots, \dot{\gamma}_N(t); t) \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{1.26}$$

Hierbei steht F_i für die (fundamental als Linearform $F_i : V_0 \to \mathbb{R}$ erklärte) Kraft auf den i-ten Punkt. Nach dem Bewegungsgesetz ist diese Kraft gleich der ins Euklidische Skalarprodukt eingesetzten und mit der (trägen) Masse m_i multiplizierten Beschleunigung des i-ten Punkts. Die zur Zeit t wirkenden Kräfte F_i sind im allgemeinen abhängig von den Orten $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ der Massenpunkte zur Zeit t, von ihren Geschwindigkeiten $\dot{\gamma}_1, \ldots, \dot{\gamma}_N$ zur Zeit t, und von der Zeit t selbst. Von den Beschleunigungen und höheren Zeitableitungen hängen die Kräfte nicht ab.

Prinzip der Determiniertheit. Unter dem *Zustand* des N-Körpersystems verstehen wir die Gesamtheit seiner Orte $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ und Geschwindigkeiten $\dot{\gamma}_1, \ldots, \dot{\gamma}_N$. Mit dieser Vokabel (und gewissen Einschränkungen an die Kräfte, so dass der einschlägige Existenz- und Eindeutigkeitssatz aus der Lösungstheorie für Differentialgleichungen anwendbar wird) resultiert aus dem Newtonschen Bewegungsgesetz das Prinzip der Determiniertheit: *die Bewegung eines N-Körpersystems ist durch seinen Anfangszustand* (d.h. den Zustand zu einer Anfangszeit t_0) *völlig bestimmt.*

1.5 Galileisches Relativitätsprinzip

Ausgestattet mit dem in Abschnitt 1.3 erarbeiteten Verständnis der Galilei-Gruppe (und unter Zugrundelegung des Galilei-Modells für den Raum und die Zeit) formulieren wir jetzt das *Galileische Relativitätsprinzip:*

$$\boxed{\text{Die Naturgesetze sind Galilei-invariant.}} \tag{1.27}$$

(Galilei-Invarianz meint hier die Invarianz unter der Wirkung aller Galilei-Transformationen.) Dieses Prinzip wollen wir anhand des Newtonschen Bewegungsgesetzes für N-Körpersysteme erläutern. Sei dazu

$$\gamma : \ t \mapsto (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_N(t)) \tag{1.28}$$

eine N-Körperbewegung, die dem Newtonschen Bewegungsgesetz genügt, d.h. die Differentialgleichung (1.26) löst. Dann verlangt das Galileische Relativitätsprinzip, dass mit der Bewegung γ auch jede Galilei-transformierte Bewegung $g \circ \gamma$ eine Lösung von (1.26) ist.

Um dieses Postulat konkret umzusetzen, müssen wir verstehen, was genau mit $g \circ \gamma$ gemeint ist und was mit den Kräften F_i auf der rechten Seite von (1.26) unter Galilei-Transformationen passiert. Leider gestalten sich die nötigen Erläuterungen etwas umständlich, wenn wir an der koordinatenfreien Formulierung festhalten. (Wir haben die allgemeine Galilei-Transformation (1.8) in $(E_3 \times \mathbb{R})$-Zerlegung anzuwenden. Das geht mittels (1.18) schneller als mittels (1.14), wo zum angegebenen linearen Teil noch der konstante, translatorische Anteil hinzuzufügen wäre.) Aus diesem Grund – und auch aus anderen auf der Hand liegenden pädagogischen Gründen – begehen wir hier den Stilbruch, zur koordinatenabhängigen Formulierung zu wechseln.

Koordinatendarstellung. Seien also x_μ die affinen Koordinaten zu einem fest gewählten Galilei-System $\{o; e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Wir setzen $x_0 \equiv t$ und schreiben (1.18) in Matrix- und Spaltenvektor-Notation um:

$$g^* t = t + b\,, \quad g^* \mathbf{x} = R\,\mathbf{x} + \mathbf{w}t + \mathbf{a}. \tag{1.29}$$

Die neuen Symbole stehen für

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{32} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

und $b \equiv a_0$. Natürlich ist $\mathbf{x}$ ein Spaltenvektor von Koordinatenfunktionen, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ hingegen ein Spaltenvektor von Zahlen. Weiter setzen wir

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{x} \circ \gamma_i\,. \tag{1.31}$$

Per Konstruktion ist jedes $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ eine Abbildung $\mathbf{r}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Die Geschwindigkeit $\dot\gamma_i$ und Beschleunigung $\ddot\gamma_i$ des i-ten Punkts werden jetzt ausgedrückt durch

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) = (\mathrm{d}\mathbf{x})_\bullet(\dot\gamma_i(t)), \quad \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = (\mathrm{d}\mathbf{x})_\bullet(\ddot\gamma_i(t)). \tag{1.32}$$

Außerdem rechnen wir die Kraftformen $F_i \in V_0^*$ in Spaltenvektoren $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^3$ um:

$$F_i =: \langle \vec F_i, \bullet \rangle \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_i := (\mathrm{d}\mathbf{x})_\bullet(\vec F_i). \tag{1.33}$$

Das Newtonsche Bewegungsgesetz nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_N(t), \dot{\mathbf{r}}_1(t), \ldots, \dot{\mathbf{r}}_N(t); t) \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{1.34}$$

Eine Galilei-Transformation g wirkt auf Zeit, Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung in dieser Koordinatendarstellung wie

$$g:\ t \mapsto t + b, \quad \mathbf{r}_i \mapsto R\,\mathbf{r}_i + \mathbf{w}t + \mathbf{a}, \quad \dot{\mathbf{r}}_i \mapsto R\,\dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{w}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_i \mapsto R\,\ddot{\mathbf{r}}_i\,. \tag{1.35}$$

Abgeschlossene Systeme. Wir sind jetzt fast soweit, dass wir eine konkrete Folgerung aus dem Galileischen Relativitätsprinzip für N-Körpersysteme ziehen können. Als letzte Vorbereitung benötigen wir hierzu noch eine Definition: ein N-Körpersystem heißt *abgeschlossen*, wenn die Kräfte, die zwischen den N Körpern des Systems und weiteren (in der mathematischen Beschreibung nicht explizit enthaltenen) Körpern wirken, vernachlässigt werden können. Zum Beispiel darf die Erde für manche Zwecke (wenn die Gezeitenwirkung des Mondes keine Rolle spielt, usw.) in brauchbarer Näherung als abgeschlossenes N-Körpersystem betrachtet werden.

Galilei-Äquivarianz der Kräfte. Die obige Rephrasierung des Galileischen Relativitätsprinzips, nämlich dass Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichung (1.34) unter Galilei-Transformationen wieder Lösungen ergeben müssen, trifft genau gesprochen dann und nur dann zu, wenn das N-Körpersystem abgeschlossen ist. Unter der Annahme der Abgeschlossenheit stellen wir jetzt

eine Bedingung auf, welche die Form der zwischen den N Körpern des Systems wirkenden Kräfte einschränkt. Dazu setzen wir die allgemeine Galilei-Transformation in Koordinatendarstellung (1.35) in die Newtonsche Bewegungsgleichung (1.34) ein und multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit R^{-1}. Aus dem Galileischen Relativitätsprinzip folgt dann die Bedingung

$$\begin{aligned}&\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\dot{\mathbf{r}}_1,\ldots,\dot{\mathbf{r}}_N;t)=\\&R^{-1}\mathbf{F}_i(R\,\mathbf{r}_1+\mathbf{w}t+\mathbf{a},\ldots,R\,\mathbf{r}_N+\mathbf{w}t+\mathbf{a},R\,\dot{\mathbf{r}}_1+\mathbf{w},\ldots,R\,\dot{\mathbf{r}}_N+\mathbf{w};t+b)\end{aligned}\qquad(1.36)$$

an die Kräfte eines abgeschlossenen Systems. In der Tat wird hierdurch gesichert, dass zwischen Lösungen und Galilei-transformierten Lösungen eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz besteht, wie es das Relativitätsprinzip verlangt. Mathematisch gesprochen besagt (1.36), dass die Kräfte $\mathbf{F}_i$ *äquivariant* bezüglich Galilei-Transformationen (kurz: Galilei-äquivariant) sein müssen.

Zum Ausschlachten der Bedingung (1.36) ist es geschickt, Spezialisierungen auf geeignete Untergruppen der Galilei-Gruppe vorzunehmen: (i) Aus der Invarianz unter Zeittranslationen $t\to t+b$ folgt sofort, dass die Kräfte $\mathbf{F}_i$ nicht explizit von der Zeit abhängen. (ii) Aus der Invarianz unter Raumtranslationen $\mathbf{x}\to\mathbf{x}+\mathbf{a}$ folgt, dass die $\mathbf{F}_i$ von den Orten nur über deren Differenzen $\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_l$ abhängen. (iii) Nimmt man jetzt noch die Invarianz unter speziellen Galilei-Transformationen $\mathbf{x}\to\mathbf{x}+\mathbf{w}t$ hinzu, dann folgt, dass die $\mathbf{F}_i$ auch von den Geschwindigkeiten nur über deren Differenzen $\dot{\mathbf{r}}_j-\dot{\mathbf{r}}_l$ abhängen. (iv) Aus der Äquivarianz bezüglich Drehungen R folgt, dass sich $\mathbf{F}_i$ kurz gesagt "wie ein Vektor transformiert".

Ergänzung. Um die letzte Aussage zu vertiefen, betrachten wir ein abgeschlossenes System von 2 Punkten, $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$. Infolge der Invarianz unter Zeittranslationen, Raumtranslationen und speziellen Galilei-Transformationen existiert nach dem Obigen eine Funktion $\Phi:\ \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, welche die funktionale Abhängigkeit von $\mathbf{F}_{12}$ folgendermaßen ausdrückt:

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\dot{\mathbf{r}}_1,\dot{\mathbf{r}}_2;t)=\Phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\dot{\mathbf{r}}_1-\dot{\mathbf{r}}_2).\qquad(1.37)$$

Die geforderte Dreh-Äquivarianz impliziert dann für die Hilfsfunktion Φ die Bedingung

$$R\,\Phi(u,v)=\Phi(R\,u,R\,v).\qquad(1.38)$$

Hieraus folgt (unter Zuhilfenahme der Theorie von Invarianten der Drehgruppe)

$$\Phi(u,v)=u\,\varphi_1(u,v)+v\,\varphi_2(u,v),\qquad(1.39)$$

mit zwei drehinvarianten Funktionen φ_j $(j=1,2)$, die nur vom Abstand $|u|=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$, vom Absolutbetrag der Geschwindigkeitsdifferenz $|v|=|\dot{\mathbf{r}}_1-\dot{\mathbf{r}}_2|$ und vom Skalarprodukt $\langle u,v\rangle=\langle\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\dot{\mathbf{r}}_1-\dot{\mathbf{r}}_2\rangle$ abhängen. Im Fall einer geschwindigkeitsunabhängigen Kraft resultiert

$$\mathbf{F}_{12}=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\varphi(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|).\qquad(1.40)$$

Beispiel. Nach dem universellen Gravitationsgesetz von Newton wirkt zwischen zwei Punktmassen die Kraft

$$\mathbf{F}_{12}=-Gm_1m_2\,\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\ .\qquad(1.41)$$

1.6 Erhaltungssätze im abgeschlossenen N-Körpersystem

Nach dem obigen Ausflug in die Koordinatensprache setzen wir unsere koordinatenunabhängige Untersuchung von N-Körpersystemen fort und setzen Abgeschlossenheit fürs erste nicht voraus. Wie zuvor bezeichnen wir Bahnkurven mit $t \mapsto \gamma(t) \in E_3$.

1.6.1 Impuls- und Schwerpunktsatz

Definition. Ein Punkt der Masse m am Ort $\gamma(t)$ mit der Geschwindigkeit $v = \dot{\gamma}$ hat den Impuls $p = \langle mv, \cdot \rangle$. Der Gesamtimpuls eines Systems von Massenpunkten ist die Summe $P = \sum_i p_i$.

Bemerkung. Geschwindigkeit ist ein Vektor (oder kontravarianter Vektor) $v \in V$ im Vektorraum der Raumtranslationen $V \simeq \mathbb{R}^3$. Hingegen ist Impuls eine Linearform oder kovarianter Vektor, $p \in V^*$ (Dualraum). Für die invariante Paarung zwischen der Linearform p und dem Vektor v schreiben wir

$$V^* \times V \to \mathbb{R}, \quad (p, v) \mapsto p(v) \equiv p \cdot v \equiv p_a v^a, \tag{1.42}$$

wobei im letzten Ausdruck die Summenkonvention gilt, d.h. es wird über das Produkt der Komponenten bzgl. einer Basis von V bzw. der Dualbasis von V^* summiert ($a = 1, 2, 3$). □

Das Newtonsche Bewegungsgesetz lautet $\dot{p} = F$. Die Zeitableitung des Impulses ist also gleich der Kraft (ebenfalls eine Linearform). Für ein System von N Massenpunkten haben wir N Gleichungen

$$\dot{p}_i = F_i \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{1.43}$$

Es ist nun zweckmäßig, die auf den i-ten Massenpunkt wirkende Kraft F_i in zwei Teile aufzuspalten: einen internen Anteil, der von den übrigen $N-1$ Massenpunkten des Systems an den Orten $\gamma_j(t)$ ($j \neq i$) herrührt, und einen externen Anteil, der mögliche Kraftwirkungen von außerhalb des Systems berücksichtigt. Wir schreiben F_{ij} für die Kraft des j-ten Punkts auf den i-ten Punkt. Die auf den i-ten Punkt wirkenden externen Kräfte fassen wir in F_i^{ext} zusammen. Die Newtonsche Bewegungsgleichung (1.43) für den i-ten Massenpunkt lautet dann

$$\dot{p}_i = \sum_{j \neq i} F_{ij} + F_i^{\text{ext}}. \tag{1.44}$$

An dieser Stelle ist ein Einschub fällig.

Actio = Reactio. In seinen *Principia* schreibt Newton: "Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen Körper B eine Kraft aus (*actio*), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (*reactio*)." Diese Aussage heißt auch das 3. Newtonsche Gesetz. In unserem Kontext wird es durch die folgende Formel ausgedrückt:

$$\boxed{F_{ij} = -F_{ji}}. \tag{1.45}$$

Das dritte ist vielleicht das tiefste der Newtonschen Gesetze; jedenfalls behält es (richtig interpretiert) seine Gültigkeit auch außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Newtonschen Mechanik.

Bemerkung. Für identische Teilchen folgt (1.45) aus (1.39) in Verbindung mit der Symmetrie unter Teilchenaustausch.

Impulssatz. Summieren wir nun beide Seiten von (1.44) über den Körperindex i und benützen $F_{ij} = -F_{ji}$, so erhalten wir

$$\dot{P} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{\text{ext}}. \tag{1.46}$$

Die Zeitableitung des Gesamtimpulses eines Systems ist also gleich der Summe der auf seine Punkte wirkenden äußeren Kräfte. Da die äußeren Kräfte für ein abgeschlossenes System verschwinden, folgt der Impulssatz:

$$\boxed{\text{Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.}} \tag{1.47}$$

Definition. Der *Schwerpunkt* Γ eines Systems von Massen $m_1, \ldots, m_N$ bestimmt sich als Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\gamma_i - \Gamma) = \mathbf{0}, \tag{1.48}$$

d.h. die mit den Massen m_i gewichtete Summe von Differenzvektoren $\gamma_i - \Gamma$ verschwindet.

Schwerpunktsatz. Durch zweimaliges Differenzieren der Gleichung (1.48) nach der Zeit und Einsetzen ins Skalarprodukt entsteht (mit $M = \sum m_i$ der Gesamtmasse)

$$\langle M\ddot{\Gamma}, \cdot\rangle = \sum_i \langle m_i\ddot{\gamma}_i\,, \cdot\rangle = \sum_i \dot{p}_i = \sum_i F_i^{\text{ext}}. \tag{1.49}$$

Offenbar bewegt sich der Schwerpunkt eines N-Körpersystems so, als ob alle Massen an ihm konzentriert wären und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden. Für ein abgeschlossenes System ($F_i^{\text{ext}} = 0$) folgt $\ddot{\Gamma} = 0$ und somit

$$\Gamma(t) = \Gamma(0) + t\,\dot{\Gamma}(0). \tag{1.50}$$

Dieses Resultat nennt man den Schwerpunktsatz:

$$\boxed{\text{Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich gleichförmig geradlinig.}} \tag{1.51}$$

1.6.2 Drehimpulssatz

In jedem Euklidischen Vektorraum V hat man durch die Operation des Einsetzens ins Euklidische Skalarprodukt einen kanonischen Isomorphismus zwischen Vektoren und Linearformen. Im Folgenden bezeichnen wir diesen Isomorphismus mit $\mathcal{I}$; also

$$\mathcal{I}:\ V \to V^*, \quad v \mapsto \langle v, \cdot\rangle \equiv \mathcal{I}(v). \tag{1.52}$$

Infinitesimale Drehungen. In aller Kürze nehmen wir hier etwas vorweg, was im Kapitel über starre Körper ausführlich behandelt werden wird. Wie wir schon wissen, ist eine Drehung eine

lineare Abbildung $R: V \to V$, welche das Skalarprodukt erhält: $\langle Rv, Rv' \rangle = \langle v, v' \rangle$. Betrachten wir nun eine 1-Parametergruppe von Drehungen $R = \exp(\varphi X)$ mit Generator X, so gilt

$$\left\langle \mathrm{e}^{\varphi X} v, \mathrm{e}^{\varphi X} v' \right\rangle = \langle v, v' \rangle \tag{1.53}$$

für alle Drehwinkel φ (und alle $v, v' \in V$). Indem wir diese Beziehung nach φ an der Stelle $\varphi = 0$ differenzieren, erhalten wir

$$\langle Xv, v' \rangle + \langle v, Xv' \rangle = 0. \tag{1.54}$$

Aufgabe. Das Tensorprodukt $V \otimes V^*$ taugt bekanntlich als Modell für die linearen Abbildungen $\mathrm{End}(V)$. Zeige, dass jedes $X \in V \otimes V^* \simeq \mathrm{End}(V)$ der Form

$$X = u \otimes \mathcal{I}(u') - u' \otimes \mathcal{I}(u) \tag{1.55}$$

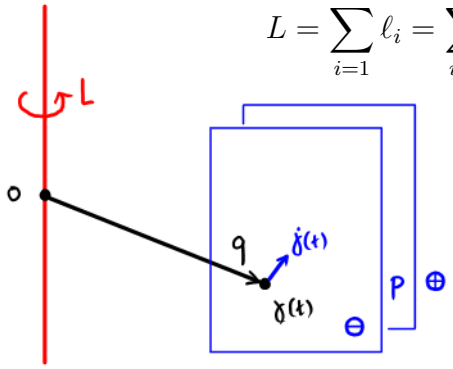
die Gleichung (1.54) löst, also der Generator einer Drehung von V ist.

Definition. Wähle einen Referenzpunkt o des Euklidischen Raumes. Der Drehimpuls (bzgl. o) eines Massenpunkts am Ort γ mit dem Impuls $p = \mathcal{I}(m\dot{\gamma})$ ist der durch

$$\ell = p \otimes q - \mathcal{I}(q) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p), \quad q = \gamma - o, \tag{1.56}$$

erklärte Tensor zweiter Stufe $\ell \in V^* \otimes V$. Der Gesamtdrehimpuls (bzgl. o) eines Systems von N Massenpunkten an den Orten γ_i mit Impulsen $p_i = \mathcal{I}(m_i \dot{\gamma}_i)$ ist die Summe

$$L = \sum_{i=1}^{N} \ell_i = \sum_{i=1}^{N} \left(p_i \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p_i) \right), \quad q_i = \gamma_i - o. \tag{1.57}$$



Bemerkungen. (i) Es ist zu beachten, dass der Drehimpuls über die Differenzvektoren $q_i = \gamma_i - o$ von der Wahl des Bezugspunkts o abhängt. Ändert man den Bezugspunkt, so ändert sich der Drehimpuls. (ii) Mit der obigen Aufgabe (und der offensichtlichen Transkription $V \leftrightarrow V^*$) lässt sich der Drehimpuls $L \in V^* \otimes V \simeq \mathrm{End}(V^*)$ als der Generator einer Drehung von V^* interpretieren. (iii) Der Drehimpuls ist in Euklidischen Räumen beliebiger Dimension (nicht nur im E_3) definiert. (iv) Die obige Definition stimmt nur für Kräfte, die von der Geschwindigkeit unabhängig sind. Wir setzen deshalb im Folgenden geschwindigkeitsunabhängige Kräfte voraus.

Aufgabe. Im E_3 hat man eine alternative Formel für den Drehimpuls. Zeige mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}_i$ von Abschnitt 1.5 und dem entsprechenden Impulsvektor $\mathbf{p}_i$, dass der ebenfalls als Vektor aufgefasste Drehimpuls $\mathbf{l}_i$ als Vektorprodukt geschrieben werden kann:

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \,. \tag{1.58}$$

Drehimpulssatz. Wir differenzieren den Drehimpuls des i-ten Punkts nach der Zeit. Von den vier entstehenden Termen heben sich die zwei mit $\dot{q}_i$ wegen $\mathcal{I}(m\dot{q}_i) = p_i$ weg. Unter Verwendung von $\dot{p}_i = F_i$ resultiert

$$\dot{\ell}_i = \dot{p}_i \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(\dot{p}_i) = D_i\,, \tag{1.59}$$

wobei D_i das am Punkt i angreifende Drehmoment bzgl. o ist:

$$D_i = F_i \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(F_i). \tag{1.60}$$

Wir benützen jetzt wieder die Zerlegung der Kraft ($F_i = \sum_{j\neq i} F_{ij} + F_i^{\text{ext}}$) und summieren über i. Zunächst betrachten wir den Beitrag zu $\dot{L} = \sum \dot{\ell}_i$ von den inneren Kräften F_{ij}:

$$\sum_{i\neq j} \left(F_{ij} \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(F_{ij})\right) = \sum_{i<j} \left(F_{ij} \otimes (q_i - q_j) - \mathcal{I}(q_i - q_j) \otimes \mathcal{I}^{-1}(F_{ij})\right).$$

Der rechte Ausdruck resultiert aus dem linken durch Verwenden von $F_{ij} = -F_{j\,i}$ und paarweises Zusammenfassen von Termen. Dieser rechte Ausdruck verschwindet, denn für geschwindigkeitsunabhängige Kräfte gilt nach Gleichung (1.40) die lineare Abhängigkeit $F_{ij} \propto \mathcal{I}(q_i - q_j)$. Somit tragen nur die äußeren Kräfte zu $\dot{L}$ bei, und es entsteht

$$\dot{L} = \sum_{i=1}^{N} D_i^{\text{ext}}\,, \quad D_i = F_i^{\text{ext}} \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(F_i^{\text{ext}}). \tag{1.61}$$

Die Zeitableitung des Gesamtdrehimpulses (bzgl. o) ist also gleich der Summe der äußeren Drehmomente (bzgl. o). Als Korollar folgt der Drehimpulssatz:

$$\boxed{\text{Der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.}} \tag{1.62}$$

Aufgabe. Verschwindet der Gesamtimpuls P eines N-Körpersystems, so ist sein Gesamtdrehimpuls L von der Wahl des Bezugspunkts o unabhängig.

1.6.3 Energiesatz

Als letzten Erhaltungssatz des abgeschlossenen N-Körpersystems behandeln wir den Energiesatz. Für diesen Zweck wollen wir annehmen, dass die inneren Kräfte konservativ sind. (Der Energiesatz für den Fall allgemeiner Kraftformen wird in der Lagrange- und Hamilton-Mechanik aufgestellt.) Wir setzen

$$F_{ij} = -(\mathrm{d}_i\, U_{ij})_{(\gamma_i,\gamma_j)}\,, \qquad U_{ij}(\gamma_i,\gamma_j) = \phi(|\gamma_i - \gamma_j|) \qquad (\phi:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}), \tag{1.63}$$

wobei $\mathrm{d}_i U_{ij}$ das Differential der Funktion $U_{ij}:\ E_3 \times E_3 \to \mathbb{R}$ bezüglich des linken Orts bezeichnet.

Definition. Die *kinetische Energie* eines Punkts γ_i der Masse m_i ist durch $\frac{1}{2}m_i|\dot{\gamma}_i|^2 \equiv \frac{1}{2}m_i\langle\dot{\gamma}_i,\dot{\gamma}_i\rangle$ gegeben. Die kinetische Energie eines Systems ist $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i|\dot{\gamma}_i|^2$. □

Durch Bilden der Zeitableitung der kinetischen Energie und Verwenden der Newtonschen Bewegungsgleichung erhalten wir

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \langle m_i\ddot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \dot{\gamma}_i\,. \tag{1.64}$$

Um den Beitrag von den inneren Kräften $\sum_{i\neq j} F_{ij}$ zu berechnen, benützen wir die Kettenregel:

$$(\mathrm{d}_i\, U_{ij})_{(\gamma_i,\gamma_j)} = (\mathrm{d}\phi)_{|\gamma_i-\gamma_j|} \circ \mathrm{d}|\bullet - \gamma_j| = -(\mathrm{d}_j\, U_{j\,i})_{(\gamma_j,\gamma_i)}\,.$$

Hiermit gilt

$$\sum_{i\neq j} F_{ij}\cdot\dot\gamma_i = -\sum_{i<j}(\mathrm{d}_i\, U_{ij})_{(\gamma_i,\gamma_j)}\cdot(\dot\gamma_i-\dot\gamma_j) = -\sum_{i<j}(\mathrm{d}\phi)_{|\gamma_i-\gamma_j|}\,\frac{d}{dt}|\gamma_i-\gamma_j| = -\frac{dU}{dt},$$

wobei $U = \sum_{i<j} U_{ij}$ die (innere) *potentielle Energie* des Systems heißt. Insgesamt haben wir $dT/dt = -(dU/dt) + \sum F_i^{\mathrm{ext}}\cdot\dot\gamma_i$ oder mit der Gesamtenergie $E = T + U$:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{\mathrm{ext}}\cdot\dot\gamma_i\,. \tag{1.65}$$

Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie eines Systems ist also gleich der Summe der Leistungen der äußeren Kräfte an seinen Punkten. Durch Spezialisierung folgt der Energiesatz:

$$\boxed{\text{Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.}} \tag{1.66}$$

Mitteilung. Es wurde gezeigt, dass abgeschlossene Systeme mindestens 10 erhaltene Größen haben; es sind dies die Energie E und die (jeweils drei) Komponenten des Drehimpulses L, des Impulses P und des Schwerpunkts $\Gamma - t\,\mathcal{I}^{-1}(P)/M$ im Ruhesystem. Wie später im Kontext des Noether-Theorems ("Symmetrien bedingen Erhaltungssätze und umgekehrt") erläutert werden wird, erwartet man genau diese Mindestzahl – nämlich zehn – wegen der Gültigkeit des Galileischen Relativitätsprinzips für abgeschlossene Systeme und der 10-Parametrigkeit der Galilei-Gruppe.

1.7 Hamiltonsche Systeme

(Auszug aus der Straumannschen Adaption, Seiten 35–50, des Textbuches von Arnold, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer 1980.)

Definition. Ist auf einem Teilraum $M \subset \mathbb{R}^n$ ein zeitabhängiges Vektorfeld X gegeben,

$$X:\ M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n,\quad (x,t)\mapsto X(x,t), \tag{1.67}$$

so heißt die Gleichung $\dot x = X(x,t)$ – in Komponenten ausgedrückt:

$$\dot x_i = X_i(x_1,\dots,x_n,t)\qquad (i=1,\dots,n), \tag{1.68}$$

ein *dynamisches System*. Eine differenzierbare Abbildung $\gamma:\ I=[a,b]\subset\mathbb{R}\to M$ heißt *Lösung* des dynamischen Systems, wenn für alle $t\in I$ die Beziehung $\dot\gamma(t) = X\big(\gamma(t),t\big)$ erfüllt ist. Der Graph von γ heißt dann eine *Integralkurve* des Vektorfeldes X. □

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen von zweiter Ordnung in der Zeit. Jedoch nehmen sie die Form eines dynamischen Systems gemäß der obigen Definition

an, wenn wir sie folgendermaßen aufschreiben. Wir verwenden die Koordinatendarstellung von Abschnitt 1.5, also $\mathbf{r}_i = \mathbf{x} \circ \gamma_i$ und $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{p}_i/m_i\,, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1/m_1, \ldots, \mathbf{p}_N/m_N, t) \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{1.69}$$

Fassen wir jetzt die Größen $\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N$ zu einer Größe $x \in \mathbb{R}^{6N}$ zusammen, so entsteht ein dynamisches System (1.68) mit $n = 6N$.

Der Raum, den die Gesamtheit aller Orte und Impulse durchläuft, heißt *Phasenraum.* Der Phasenraum hat immer gerade Dimension: $n = \dim M = 2f$. Die Zahl f der Ortskoordinaten heißt auch die *Zahl der Freiheitsgrade.* Für ein System von N Punkten im E_3 ist $f = 3N$. Für ein System von N Punkten im E_3 mit Zwangsbedingungen (siehe später) ist $f \leq 3N$.

Definition. Ein Vektorfeld X_H der speziellen Form

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial x_{f+1}}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_{2f}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial x_f} \right) \tag{1.70}$$

mit H einer differenzierbaren Funktion $H : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2f} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Hamiltonsch.* Das zugehörige dynamische System $\dot{x} = X_H(x, t)$ heißt *Hamiltonsches* System (mit Hamilton-Funktion H).

Beispiel. Ein System von N Punkten $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ mit Impulsen $\mathbf{p} \equiv (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N)$ und konservativen Kräften $\mathbf{F}_i = -\mathrm{grad}_{\mathbf{r}_i} U$ ist Hamiltonsch mit der Energie

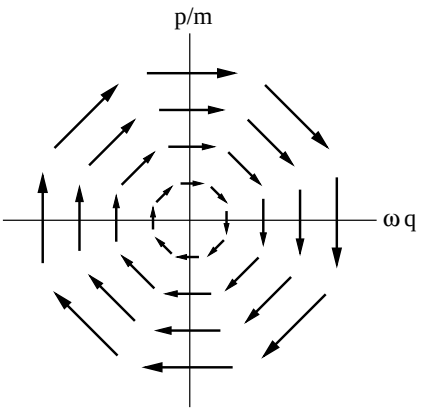
$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i} + U(\mathbf{r}) \tag{1.71}$$

als Hamilton-Funktion. In diesem Fall hängt H nicht explizit von der Zeit ab.

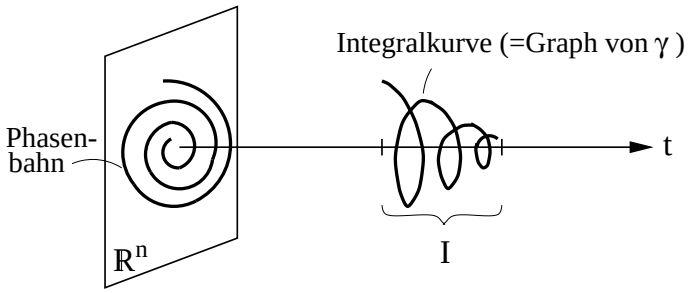
Als besonders einfachen Spezialfall betrachten wir den harmonischen Oszillator für $f = 1$. In diesem Fall sind die Hamilton-Funktion H und das Hamiltonsche Vektorfeld X_H gegeben durch

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\,\omega^2 q^2\,, \quad X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\,, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = \left(\frac{p}{m}, -m\omega^2 q \right). \tag{1.72}$$

Das dynamische System $\dot{q} = p/m$, $\dot{p} = -m\omega^2 q$ erkennt man nach Elimination von p als die Bewegungsgleichung $\ddot{q} = -\omega^2 q$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Schwingungsfrequenz ω. Das folgende Bild deutet das Vektorfeld X_H graphisch an:



Definition. Das dynamische System zu einem zeitunabhängigen (bzw. zeitabhängigen) Vektorfeld $X: M \to \mathbb{R}^n$ (bzw. $X: M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$) heißt *autonom* (bzw. nichtautonom). Unter dem *erweiterten Phasenraum* versteht man das direkte Produkt $M \times \mathbb{R}$. Ist $\gamma: I \to M$ eine Integralkurve von X, so heißt die Punktmenge $\{\gamma(t) \,|\, t \in I\} \subset M$ eine *Phasenbahn*.



Bemerkung. Jedes nichtautonome System $\dot{x} = X(x,t)$ hat im erweiterten Phasenraum $M \times \mathbb{R}$ die *autonome Erweiterung* $\dot{x} = X(x,t)$, $\dot{t} = 1$.

Lokale Flüsse. Gegeben sei ein zeitunabhängiges Vektorfeld X auf $M \subset \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $x_0 \in M$. Unter einem *lokalen Fluss*, der durch das Vektorfeld X in einer Umgebung von x_0 bestimmt wird, versteht man ein Tripel $(I, \mathcal{U}_0, \phi)$, das aus einem Intervall $I = [-\varepsilon, +\varepsilon]$, einer Umgebung $\mathcal{U}_0$ von x_0 und einer Abbildung $\phi: \mathcal{U}_0 \times I \to M$ besteht, wobei die folgenden Eigenschaften gelten:

(1) Für festes $t \in I$ ist die durch $\phi_t(x) := \phi(x,t)$ definierte Abbildung $\phi_t: \mathcal{U}_0 \to \phi_t(\mathcal{U}_0) \subset M$ ein Diffeomorphismus.

(2) Für festes $x \in \mathcal{U}_0$ ist die durch $\gamma(t) := \phi(x,t)$ definierte Abbildung $\gamma: I \to M$ eine Lösung von $\dot{x} = X(x)$ zur Anfangsbedingung $\gamma(0) = x$.

(3) Es gilt (lokal): $\phi_s\big(\phi_t(x)\big) = \phi_{s+t}(x)$.

Erläuterungen.

(i) Eigenschaft (2) impliziert insbesondere $\phi(x,0) = x$, d.h. $\phi_0 = \mathrm{Id}$.

(ii) Wenn wir eine feste Zeitspanne t vorgeben und fragen, wohin ein beliebiger Punkt $x \in \mathcal{U}_0$ in dieser Zeitspanne unter der durch $\dot{x} = X(x)$ determinierten Bewegung wandert, dann liefert $\phi_t = \phi(\bullet, t)$ hierzu die Antwort: $x \mapsto \phi_t(x)$. Wenn wir andererseits einen festen *Punkt* x vorgeben (zur Zeit $t = 0$) und wissen wollen, welcher Phasenbahn er folgt, dann ist dies gerade die Kurve $\gamma(t) = \phi(x,t)$. In diesem Sinn beinhaltet ϕ die (lokal) vollständige Beschreibung der Lösungen von $\dot{x} = X(x)$.

(iii) Eigenschaft (3) sagt aus, dass die Diffeomorphismen ϕ_t eine (lokale) 1-parametrige Gruppe mit neutralem Element ϕ_0 bilden.

(iv) Das Wort "Fluss" erklärt sich daraus, dass wir die den Integralkurven von X folgende Bewegung von Punkten x durch M als das Fließen einer Strömung auffassen können.

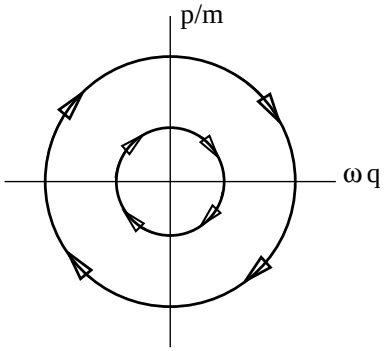
(v) Mitteilung. In der Theorie der Differentialgleichungen lernt man, dass das Vektorfeld X einen lokalen Fluss in einer Umgebung jedes Punktes $x_0 \in M$ bestimmt.

Beispiel 1. Der auf einem affinen Raum durch das konstante Vektorfeld $X(x) = v$ bestimmte Fluss ist $\phi(x,t) = x + vt$.

Beispiel 2. Der durch das Hamiltonsche Vektorfeld $X_H = (p/m, -m\omega^2 q)$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators bestimmte Fluss ist

$$\phi(q,p,t) = \left(q\cos\omega t + \frac{p}{m\omega}\sin\omega t\,, -m\omega q\sin\omega t + p\cos\omega t\right). \tag{1.73}$$

Das "Fließen der Strömung" sieht hier folgendermaßen aus:



1.8 Autonome Hamiltonsche Systeme mit einem Freiheitsgrad

(Straumann, Seiten 50ff.)
In Vorbereitung auf das eigentliche Thema dieses Abschnitts konstruieren wir die Lösung γ eines autonomen Systems für $n = 1$,

$$\dot{x} = X(x) \tag{1.74}$$

zu einer Anfangsbedingung $\gamma(t_0) = x_0$.

(i) Wenn $X(x_0) = 0$ gilt, dann ist die Lösung durch $\gamma(t) = x_0$ gegeben.

(ii) Sei jetzt $X(x_0) \neq 0$. Wegen $\dot{\gamma}(t_0) = X(x_0) \neq 0$ existiert nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen die Umkehrfunktion $t = \tau(x)$ zu $x = \gamma(t)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0. Diese Funktion erfüllt $d\tau(x)/dx = 1/X(x)$, und Integration dieser Beziehung liefert

$$\tau(x) - \tau(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{X(y)}\,. \tag{1.75}$$

Damit ist das Problem der Lösung von (1.74) auf eine Quadratur (d.h. die Berechnung eines unbestimmten Integrals) und die Umkehrung einer Funktion zurückgeführt. □

Nun betrachten wir das zur Newtonschen Bewegungsgleichung $m\ddot{q} = F(q)$ äquivalente autonome System

$$\dot{q} = \frac{p}{m}\,, \quad \dot{p} = F(q). \tag{1.76}$$

Mit $F(q) = -U'(q)$ und $H(q,p) = p^2/2m + U(q)$ wird dies zu

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}\,, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\,. \tag{1.77}$$

Wenn wir jetzt noch $x = (q,p)$ und $X_H = (\partial H/\partial p, -\partial H/\partial q)$ setzen, dann nimmt dies die Gestalt $\dot{x} = X_H(x)$ eines autonomen dynamischen Systems für $n = 2$ an.

Energiesatz. Sei E die Energie längs einer Lösung $t \mapsto \gamma(t)$ des Hamiltonschen Systems, also

$$E(t) = (H \circ \gamma)(t) = H(q(t), p(t)). \tag{1.78}$$

Die Zeitableitung $\dot{E}$ (ausführlich: totale Zeitableitung) der Energie ist

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\,\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q}\,\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0. \tag{1.79}$$

Es folgt der Energiesatz $E(t) = (H \circ \gamma)(t) = \text{const}$; oder in Worten:

$$\boxed{\text{Die Energie eines autonomen Hamiltonschen Systems ist erhalten.}} \tag{1.80}$$

Definition. Die Punktmenge $\{(q,p) \in \mathbb{R}^2 \mid H(q,p) = E\}$ heißt die *Niveaukurve* von H zur Energie E. (Für $f > 1$ spricht man von Niveauflächen der Energie.) □

Mit Hilfe des Energiesatzes und des Begriffs von Niveaukurven können wir die Lösungen von (1.77) mit dem eingangs beschriebenen Verfahren konstruieren. Dazu vorweg noch die

Definition. Sei $f:\ M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ein Punkt $x \in M$, in dem gilt $(\mathrm{d}f)_x = 0$, heißt *kritischer Punkt* von f.

Lösungsverfahren. Offensichtlich fallen die Nullstellen des Vektorfeldes X_H mit den kritischen Punkten von H zusammen. In einer Umgebung jedes nichtkritischen Punktes (q_0, p_0) ist nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen die Energieniveaukurve glatt. Lokal können wir dann die Gleichung $E = H(q,p)$ nach dem Impuls oder dem Ort auflösen, $p = f(q,E)$ oder $q = g(p,E)$, und die Auflösefunktion in die erste bzw. zweite Gleichung von (1.77) einsetzen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}\big(q, f(q,E)\big) \quad \text{oder} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\big(g(q,E), p\big). \tag{1.81}$$

Beide Probleme sind von der eindimensionalen Form (1.74) und lassen sich somit wie oben beschrieben durch Quadratur und Umkehrung einer Funktion lösen. Das erste Verfahren funktioniert für $p_0 \neq 0$, das zweite für $U'(q_0) \neq 0$.

Phasenporträt. Einen Überblick über das qualitative Verhalten der Lösungen liefert das sogenannte *Phasenporträt*. Zunächst einmal erklären wir den Definitionsbereich $M \subset \mathbb{R}^2$ der Hamilton-Funktion zum Phasenraum des Hamiltonschen Systems. Für eine Lösung $t \mapsto \gamma(t) = \big(q(t), p(t)\big)$ von (1.77) zur Anfangsbedingung (q_0, p_0) zur Zeit t_0 liegt $\gamma(t)$ für alle Zeiten t in der die Anfangsbedingung (q_0, p_0) enthaltenden Zusammenhangskomponente der Energieniveaukurve zu $E = H(q_0, p_0)$, d.h. die Phasenbahnen fallen mit den Zusammenhangskomponenten der Energieniveaukurve zusammen. Für die Phasenbahnen bestehen demnach folgende Möglichkeiten:

(A) Die Phasenbahn fällt mit einem kritischen Punkt zusammen.

Andernfalls ist die Phasenbahn eine glatte Kurve, welche

(B) geschlossen ist, ohne durch einen kritischen Punkt zu laufen;

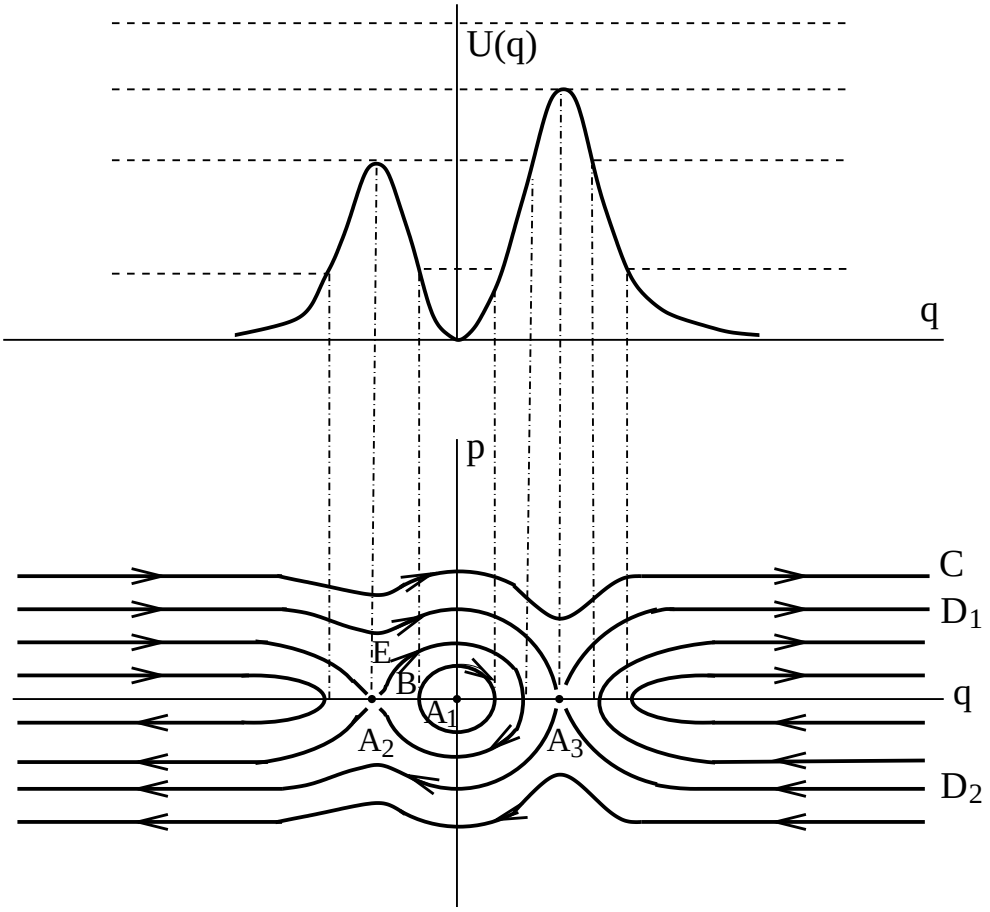
(C) beidseitig ins Unendliche läuft, ohne einen kritischen Punkt zu treffen;

(D) einseitig ins Unendliche läuft und im Endlichen in einem kritischen Punkt endet;

(E) beidseitig in einem (nicht notwendig demselben) kritischen Punkt endet.

Bemerkungen. Der Fall (A) entspricht einer stabilen oder instabilen Gleichgewichtslage. Im Fall (B) ist die Bewegung periodisch. In den Fällen (C) bis (E) erreicht oder verlässt die Lösung $\gamma(t)$ den kritischen Punkt nicht in endlicher Zeit. □

Die folgende Figur zeigt das Phasenporträt für $H(q,p) = p^2/2m + U(q)$ und $U(q)$ wie skizziert. Die Niveaukurven sind gegeben durch $p = \pm\sqrt{2m\big(E - U(q)\big)}$ und die kritischen Punkte von H durch $p = 0 = U'(q)$.

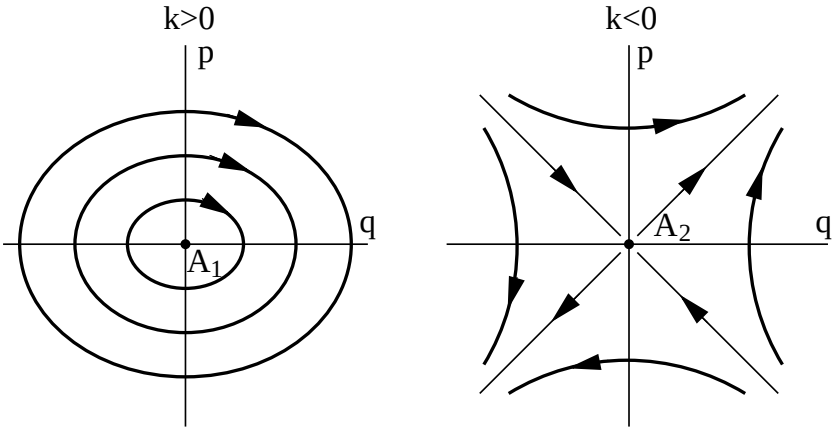


Das Verhalten in der Nähe eines kritischen Punktes $(q_0, p_0 = 0)$, $U'(q_0) = 0$ untersuchen wir gesondert. Dazu entwickeln wir $U(q)$ in eine Taylorreihe um $q = q_0$:

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2}\,U''(q_0)(q - q_0)^2 + \dots\,. \tag{1.82}$$

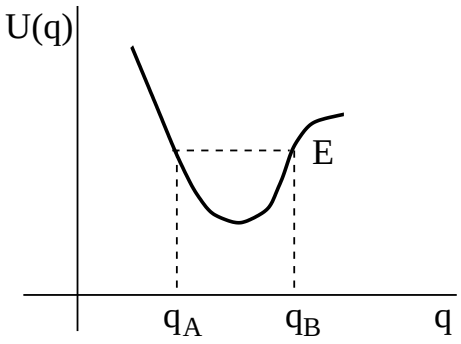
Wir betrachten nur den nichtentarteten (generischen) Fall $U''(q_0) \neq 0$. O.B.d.A. wählen wir $q_0 = 0$ und $U(q_0) = 0$. Die qualitativen Züge des Phasenflusses nahe $(q_0, p_0) = (0, 0)$ werden dann richtig

erfasst, wenn wir $U(q) \equiv kq^2/2$ setzen. Die Niveaukurven zu $H(q,p) = p^2/2m + kq^2/2$ sind Ellipsen (bzw. Hyperbeln) für $k > 0$ (bzw. $k < 0$).



Der singuläre Punkt A_1 (bzw. A_2) heißt auch *elliptischer* (bzw. *hyperbolischer*) Fixpunkt von X_H.

Schwingungsdauer. Wir betrachten jetzt eine geschlossene Phasenbahn (Typ B von oben), d.h. die Situation sei wie in der folgenden Skizze:



Die durch $E = U(q_i)$ bestimmten Punkte q_A und q_B heißen *Umkehrpunkte.* Die Dauer eines vollständigen Durchlaufs der Phasenbahn – z.B. ausgehend von $(q,p) = (q_A, 0)$ über $(q_B, 0)$ zurück nach $(q,p) = (q_A, 0)$ – heißt *Schwingungsdauer*, τ. Als Funktion der Energie ist sie gegeben durch

$$\tau(E) = 2 \int_{q_A(E)}^{q_B(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U(q)\big)}}\,. \tag{1.83}$$

Aufgabe. Die Phasenbahnen eines Hamiltonschen Systems mit Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + U(q), \quad U(q) = \alpha\, q^h, \quad h \in 2\mathbb{N}, \quad \alpha > 0, \tag{1.84}$$

sind für alle Energien $E > 0$ geschlossen. Die Schwingungsdauer τ variiert in diesem Fall mit der Energie wie $E^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{h}}$. Insbesondere ist die Schwingungsdauer für den eindimensionalen harmonischen Oszillator ($h = 2$) von der Energie unabhängig: $\tau(E) = 2\pi/\omega$, mit der Oszillatorfrequenz $\omega = \sqrt{2\alpha/m}$.

1.9 Das Zweikörper-Problem mit Zentralkräften

Wir untersuchen hier die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\langle m_1\ddot{\gamma}_1, \cdot\,\rangle = F_{12}\,, \quad \langle m_2\ddot{\gamma}_2, \cdot\,\rangle = F_{21}\,, \tag{1.85}$$

für ein abgeschlossenes System von zwei Punkten $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in E_3$ mit Massen m_1 bzw. m_2. Dabei treffen wir die Annahme, dass die Kräfte F_{12} und F_{21} nicht von der Geschwindigkeit abhängen; nach Abschnitt 1.5 sind sie dann von der Form

$$F_{12} = -F_{21} = -(\mathrm{d}_1 U)_{\gamma_1,\gamma_2} = (\mathrm{d}_2 U)_{\gamma_1,\gamma_2}\,, \quad U(\gamma_1,\gamma_2) = \phi(|\gamma_1 - \gamma_2|). \tag{1.86}$$

Wegen $F_{12} \propto \langle \gamma_1 - \gamma_2, \cdot\,\rangle$ spricht man auch von einer *Zentralkraft.*

Aus Abschnitt 1.6 wissen wir bereits, dass für solche Systeme zehn Erhaltungssätze gelten. Durch konsequentes Ausnutzen all dieser Erhaltungssätze lässt sich das Problem der Lösung der Bewegungsgleichungen wieder auf Quadraturen zurückführen.

1.9.1 Abtrennen der Schwerpunktbewegung

Der erste Schritt zur Lösung besteht in der Separation von Schwerpunkt- und Relativbewegung. Dazu erinnern wir an die Definition des Schwerpunkts Γ durch

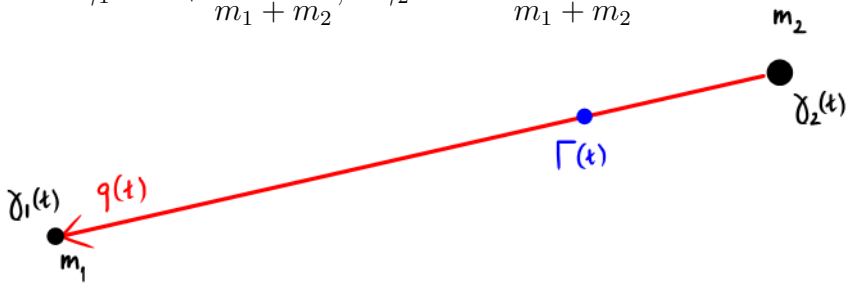
$$m_1(\gamma_1 - \Gamma) + m_2(\gamma_2 - \Gamma) = 0$$

und führen den Orts(-differenz)vektor q der Relativbewegung ein:

$$q = \gamma_1 - \gamma_2\,. \tag{1.87}$$

Die Umkehrtransformation hierzu lautet

$$\gamma_1 = \Gamma + \frac{m_2\, q}{m_1 + m_2}, \quad \gamma_2 = \Gamma - \frac{m_1\, q}{m_1 + m_2}. \tag{1.88}$$



Nach dem Schwerpunktsatz für abgeschlossene Systeme (siehe Abschnitt 1.6.1) bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig: $\ddot{\Gamma} = 0$. Hieraus folgt durch zweimaliges Differenzieren der ersten Gleichung in (1.88) die Beziehung $\ddot{\gamma}_1 = (m_1 + m_2)^{-1} m_2\, \ddot{q}$ und somit

$$\langle m\ddot{q}, \cdot\,\rangle = F, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad F \equiv F_{12}, \tag{1.89}$$

wobei m die *reduzierte Masse* heißt. Da über die Schwerpunktsbewegung mit $\Gamma(t) = \Gamma(0) + t\,\dot{\Gamma}(0)$ bereits alles gesagt ist, verbleibt nur das Problem der Lösung der Gleichungen (1.89) für die Relativbewegung. Dieses ist lösbar, weil neben der Energie auch der Drehimpuls erhalten ist.

1.9.2 Invariante Ebene der Relativbewegung

Wir erinnern daran, dass der Drehimpuls $L \equiv L^{(o)}$ von der Wahl eines Bezugspunkts o abhängt.

Definition. Unter dem *Drehimpuls der Relativbewegung* versteht man den Gesamtdrehimpuls $L^{(\Gamma)}$ bezüglich des Schwerpunkts $\Gamma = \Gamma(t)$.

Aufgabe. Im betrachteten Fall von 2 Massenpunkten drückt sich der Gesamtdrehimpuls $L \equiv L^{(\Gamma)}$ bezüglich des Schwerpunkts Γ durch

$$L = p \otimes q - \mathcal{I}(q) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p) \tag{1.90}$$

aus, wobei $p = \langle m\dot{q}, \cdot \rangle \equiv \mathcal{I}(m\dot{q})$ der Impuls der Relativbewegung ist. □

Wie wir bereits wissen, gilt für ein abgeschlossenes System mit beliebig (aber fest) gewähltem Bezugspunkt o der Drehimpulssatz: $\dot{L}^{(o)} = 0$. Aus der Transformationsformel

$$L^{(\Gamma)} = L^{(o)} + P \otimes (\Gamma(t) - o) - \mathcal{I}(\Gamma(t) - o) \otimes \mathcal{I}^{-1}(P) \qquad (P = p_1 + p_2) \tag{1.91}$$

folgt mit $P \propto \mathcal{I}(\dot{\Gamma})$, dass auch der Drehimpuls $L^{(\Gamma)}$ der Relativbewegung erhalten ist: $\frac{d}{dt} L^{(\Gamma(t))} = 0$.

Aufgabe. Verifiziere $\frac{d}{dt} L^{(\Gamma(t))} = 0$ durch direkte Rechnung ausgehend von (1.90). □

Ab jetzt schreiben wir für den zeitlich konstanten Drehimpuls der Relativbewegung kurz $L \equiv L^{(\Gamma(t))}$. Wir betrachten nur den Fall $L \neq 0$ (denn andernfalls liegt geradlinige Bewegung vor und wir können direkt so verfahren wie in Abschnitt 1.8.) Aus Abschnitt 1.6.2 wissen wir, dass der Drehimpuls $L : V^* \to V^*$ als infinitesimale Drehung aufgefasst werden kann, also als Generator einer 1-Parametergruppe von Drehungen $R = \mathrm{e}^{\alpha L}$.

Tatsache. Im Fall von $V \simeq \mathbb{R}^3$ existiert zu jeder infinitesimalen Drehung $L : V^* \to V^*$ eine Orthonormalbasis $\{f_1, f_2, f_3\}$ mit der Eigenschaft

$$Lf_1 = f_2|L|, \quad Lf_2 = -f_1|L|, \quad Lf_3 = 0. \tag{1.92}$$

Bemerkungen. (i) Der Beweis dieser Tatsache wird im Kapitel über starre Körper geliefert. (ii) Wir nennen die skalare Größe $|L|$ den Betrag des Drehimpulses L. (iii) Die Orthonormalbasis $\{f_1, f_2, f_3\}$ ist nicht eindeutig bestimmt. Basisunabhängig erklärt ist der Kern von L,

$$A = \ker L = \mathbb{R} \cdot f_3\,, \tag{1.93}$$

der wegen $\mathrm{e}^{\alpha L} f_3 = f_3$ die anschauliche Bedeutung einer Drehachse hat. Ebenfalls basisunabhängig erklärt ist das orthogonale Komplement von A, also die zur Drehachse A senkrechte Ebene,

$$A^\perp = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, f_2\}\,. \quad \square \tag{1.94}$$

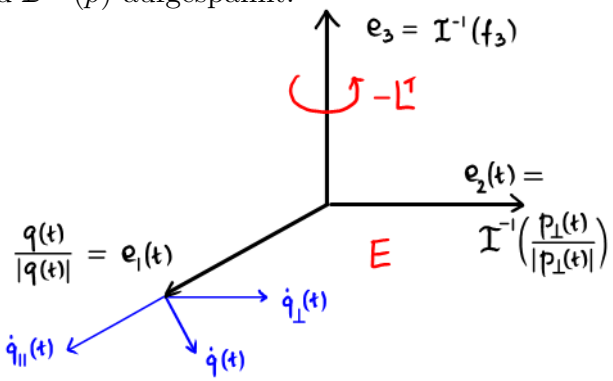
Nun folgt aus der Erhaltung des Drehimpulses L, dass auch die zu L assoziierte Ebene $A^\perp$ erhalten ist, also nicht von der Zeit abhängt. Diese Ebene – genauer: ihr isomorphes Bild

$$E \equiv \mathcal{I}^{-1}(A^\perp) \subset V \tag{1.95}$$

im Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ der Raumtranslationen – nennen wir die invariante Ebene der Relativbewegung; oder kürzer: die *Bewegungsebene*, E.

Aufgabe. Jeder zu q und $\mathcal{I}^{-1}(p)$ senkrechte Vektor in V steht senkrecht auf E. □

Im Umkehrschluss folgt, dass p und $\mathcal{I}(q)$ auf A senkrecht stehen, also in der invarianten Ebene $A^\perp$ liegen. Da die Linearformen p und $\mathcal{I}(q)$ wegen $L \neq 0$ linear unabhängig sind, spannen sie $A^\perp$ auf. Die Bewegungsebene E wird durch die Vektoren q und $\mathcal{I}^{-1}(p)$ aufgespannt.



1.9.3 Reduktion auf Radialbewegung

Es ist nun zweckmäßig, den zeitabhängigen Impuls in zwei orthogonale Anteile zu zerlegen:

$$p(t) = p_\perp(t) + p_\parallel(t), \quad p_\perp(t) \cdot q(t) = 0. \tag{1.96}$$

$p_\parallel$ bzw. $p_\perp$ ist also die zu $\mathcal{I}(q)$ parallele bzw. senkrechte Komponente von p.

Aufgabe. Das zeitabhängige Orthonormalsystem

$$f_1(t) = \frac{\mathcal{I}(q(t))}{|q(t)|}, \quad f_2(t) = \frac{p_\perp(t)}{|p_\perp(t)|}, \tag{1.97}$$

spannt die invariante Ebene $A^\perp$ auf, und es gelten die Relationen

$$Lf_1(t) = f_2(t)|L|, \quad Lf_2(t) = -f_1(t)|L|, \quad |L| = |q(t)|\,|p_\perp(t)| = \text{const}. \tag{1.98}$$

Energiesatz im Einsatz. Die Gesamtenergie abgeschlossener Systeme ist bekanntlich erhalten. Diese Aussage gilt für jedes Galilei-System, insbesondere gilt sie im Ruhesystem des Schwerpunkts. Wir bezeichnen die Gesamtenergie im Ruhesystem des Schwerpunkts mit $E \equiv E_{\text{rel}}$.

Mit $P = p_1 + p_2 = 0$ und $p_1 = \mathcal{I}(m_1\dot{\gamma}_1) = \mathcal{I}(m\dot{q}) = p$ berechnet sich der kinetische Anteil von E_{rel} zu

$$\frac{|p_1|^2}{2m_1} + \frac{|p_2|^2}{2m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{|p_1|^2}{2} = \frac{|p|^2}{2m} = \frac{|p_\parallel|^2}{2m} + \frac{|p_\perp|^2}{2m}. \tag{1.99}$$

Die Gesamtenergie ist

$$E = E_{\text{rel}} = \frac{|p|^2}{2m} + \phi(|q|). \tag{1.100}$$

Wir setzen jetzt $r(t) := |q(t)|$ und lösen die letzte Gleichung in (1.98) nach $|p_\perp|$ auf. Benützen wir auch noch $|p_\parallel| = m\dot{r}$, so entsteht für die Gesamtenergie der Ausdruck

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V(r), \quad V(r) = \frac{|L|^2}{2mr^2} + \phi(r). \tag{1.101}$$

Die Funktion $V(r)$ heißt das *effektive Potential* der Radialbewegung. Sie beinhaltet neben dem eigentlichen Potential ϕ noch das *Zentrifugalpotential* $|L|^2/2mr^2$, welches abstoßend wirkt und für $r \to 0$ divergiert.

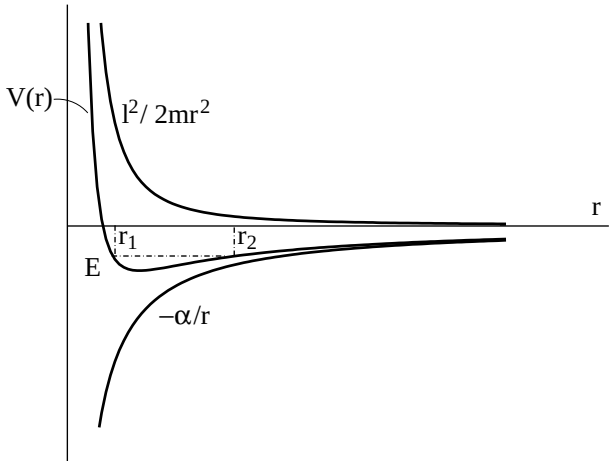
Offenbar wird die gestellte Aufgabe durch das Ergebnis (1.101) auf ein autonomes Hamiltonsches System mit einem einzigen Freiheitsgrad r reduziert. Letzteres ist von dem in Abschnitt 1.8 behandelten Typ und also über den Energiesatz durch Quadratur lösbar:

$$\int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V(r)}} \,. \tag{1.102}$$

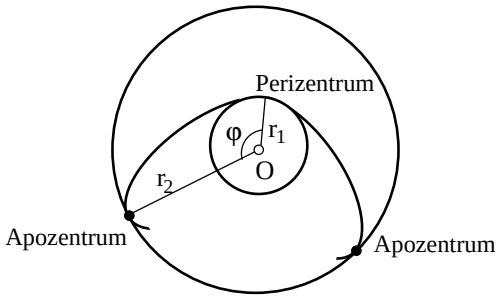
Aufgabe. Der in der Bewegungsebene E rotierende Differenzvektor $q(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

1.9.4 Untersuchung der Bahnkurven

(Arnold, Seiten 34 ff.)
Wir wählen feste Werte für den Betrag $l = |L|$ des Drehimpulses und die Energie E. Man kann sich dann die zeitliche Änderung von r leicht veranschaulichen, indem man den Graphen des effektiven Potentials $V(r)$ zeichnet. Die nächste Figur zeigt $V(r)$ für den Fall von $\phi(r) = -\alpha/r$ $(\alpha > 0)$.



Alle Bahnkurven zu den vorgegebenen Werten von $|L|$ und E liegen in dem durch die Ungleichung $V(r) \leq E$ definierten Gebiet. Auf dem Rand dieses Gebiets gilt $V(r) = E$ und somit $\dot{r} = 0$, d.h. die Geschwindigkeit in Radialrichtung verschwindet dort. (Jedoch ist die totale Geschwindigkeit der Relativbewegung auf diesem Rand im allgemeinen von Null verschieden.) Die Ungleichung $V(r) \leq E$ legt ein ringförmiges Gebiet $0 \leq r_1 \leq r \leq r_2 \leq \infty$ (oder mehrere solche Gebiete) fest. Gilt $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$, so ist die Bewegung beschränkt und spielt sich innerhalb des Rings zwischen den Kreisen mit Radien r_1 und r_2 ab. Der Verlauf einer Bahn ist in der nächsten Figur skizziert:



Wir bezeichnen den Winkel zwischen $q(0)$ und $q(t)$ mit φ. Da dieser Winkel eine monotone Funktion der Zeit ist, können wir ihn zur Parametrisierung der Bahnkurven verwenden. Die Bestimmung der (auf die Radialrichtung projezierten) Bahnkurve $r(\varphi)$ erfolgt am schnellsten direkt, indem man die Zeit eliminiert:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{mr^2}{|L|}\,\dot{r} = \frac{mr^2}{|L|}\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(r)\big)}\,, \tag{1.103}$$

was auf die folgende Quadratur führt:

$$\int d\varphi = \frac{|L|}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V(r)}}\,. \tag{1.104}$$

Während sich der Winkel φ monoton ändert, oszilliert r periodisch zwischen r_1 und r_2. Die Punkte, wo $r = r_1$ ($r = r_2$) gilt, heißen perizentral (bzw. apozentral).

Aufgabe. Jeder Strahl vom Nullpunkt der Bewegungsebene E durch einen perizentralen oder apozentralen Punkt ist eine Symmetrieachse der Bahn. □

Die Bahn ist im allgemeinen nicht geschlossen: der Winkel $\Delta\varphi$ zwischen aufeinander folgenden Perizentren und Apozentren ist durch

$$\Delta\varphi = \frac{|L|}{\sqrt{2m}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V(r)}} \tag{1.105}$$

gegeben. Der Winkel zwischen sukzessiven Perizentren ist doppelt so groß. Die Bahn ist genau dann geschlossen, wenn $2\Delta\varphi$ kommensurabel mit 2π ist, d.h. für $2\Delta\varphi = 2\pi m/n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$. Für $r_1 = r_2$ liegt Entartung zu einer Kreisbahn vor.

Wir betrachten jetzt noch den Fall $r_2 = \infty$. Wenn $\lim_{r\to\infty} \phi(r) = \phi_\infty < \infty$ gilt, existieren Bahnen, die ins Unendliche reichen. Im Fall von $E > \phi_\infty > -\infty$ ist die asymptotische Geschwindigkeit endlich: $\dot{r}_\infty = \sqrt{\frac{2}{m}(E - \phi_\infty)}$.

Mitteilung. Es lässt sich zeigen, dass $\phi(r) = -\alpha/r$ und $\phi(r) = \alpha\, r^2$ (jeweils mit $\alpha > 0$) die einzigen Potentiale sind, für die alle beschränkten Bahnen geschlossen sind.

1.9.5 Kepler-Problem

Hier geht es um die Bewegung eines Planeten um die Sonne. Dazu spezialisieren wir zum Newtonschen Gravitationspotential,

$$\phi(r) = -\frac{\alpha}{r}\,, \quad \alpha = Gm_1m_2 > 0\,. \tag{1.106}$$

G ist die universelle Gravitationskonstante. Das effektive Potential $V(r)$ wurde bereits oben skizziert. Die minimalen und maximalen Radien r_1 und r_2 sind die Lösungen der Gleichung

$$E = V(r_i) = -\frac{\alpha}{r_i} + \frac{|L|^2}{2mr_i^2}\,. \tag{1.107}$$

Bei der Spezifizierung dieser Radien sind drei Energiebereiche zu unterscheiden:

(i) $E = 0$: $\quad r_1 = |L|^2/2m\alpha$ und $r_2 = \infty$.

(ii) $E > 0$: $\quad r_1 = -(\alpha/2E) + \sqrt{(\alpha/2E)^2 + |L|^2/2mE}$ und $r_2 = \infty$.

(iii) $0 > E \geq V_{\min} = -m\alpha^2/2|L|^2$: $\quad r_{1,2} = -(\alpha/2E) \pm \sqrt{(\alpha/2E)^2 + |L|^2/2mE}$.

Für $E \geq 0$ sind alle Bahnen unbeschränkt; für $0 > E \geq V_{\min}$ liegen beschränkte Bahnen vor, von denen wir unten sehen werden, dass sie alle geschlossen sind; für $E = V_{\min}$ ist die Bahn zu einer Kreisbahn mit Radius $r_1 = r_2 = -\alpha/(2E)$ entartet. Das Integral

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \frac{|L|}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{s^2} \left(E + \frac{\alpha}{s} - \frac{|L|^2}{2ms^2} \right)^{-1/2} \tag{1.108}$$

lässt sich analytisch berechnen. Hierfür ist es geschickt, dimensionslose Größen einzuführen. Wir definieren eine charakteristische Länge ρ durch $|L|^2/m\rho^2 = \alpha/\rho$ und setzen $s = \rho \cdot \xi$ und $E = \varepsilon \cdot \alpha/2\rho$. Offenbar ist ξ eine dimensionslose Länge und ε eine dimensionslose Energie. Zu beachten ist auch, dass $E \geq V_{\min}$ der Ungleichung $\varepsilon \geq -1$ entspricht. Mit der Variablensubstitution $\xi = u^{-1}$ wird das obige Integral dann zu

$$\int_{r_0/\rho}^{r/\rho} \frac{d\xi}{\xi^2} \left(\varepsilon + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} \right)^{-1/2} = \int_{\rho/r}^{\rho/r_0} \frac{du}{\sqrt{\varepsilon + 2u - u^2}} \,. \tag{1.109}$$

Nun ergänzen wir quadratisch: $\varepsilon + 2u - u^2 = (\varepsilon + 1) - (1 - u)^2$. Mit der Definition $\varepsilon + 1 = \eta^2$ und der Substitution $v = (1 - u)/\eta$ geht das unbestimmte Integral in $\int dv/\sqrt{1 - v^2} = \arcsin v + c$ über. So gelangen wir zum Resultat

$$\varphi - \varphi_0 = \arcsin\left(\eta^{-1}(1 - \rho/r) \right) . \tag{1.110}$$

Durch Auflösen nach r folgt

$$r(\varphi) = \frac{\rho}{1 - \eta \sin(\varphi - \varphi_0)} \,, \quad \rho = \frac{|L|^2}{m\alpha} \,, \quad \eta = \left(1 + 2E \frac{|L|^2}{m\alpha^2} \right)^{1/2} . \tag{1.111}$$

Nach Übergang zu kartesischen Koordinaten sieht man sofort, dass die durch $r(\varphi)$ beschriebenen Bahnen folgenden Typs sind:

(i) Parabel für $\eta = 1$ (oder $E = 0$);

(ii) Ellipse für $0 \leq \eta < 1$ (oder $V_{\min} \leq E < 0$);

(iii) Hyperbel für $\eta > 1$ (oder $E > 0$).