

2 Starre Körper

In diesem Kapitel studieren wir die Kinematik und die Dynamik starrer Körper. Insbesondere untersuchen wir den kräftefreien Kreisel.

2.1 Exkurs über die Drehgruppe

Wir erinnern vorab an ein paar Definitionen aus der linearen Algebra. Im Folgenden seien alle Vektorräume reell und endlich-dimensional.

- (i) Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und $\Omega \in \text{Alt}^n(V)$ ($\Omega \neq 0$) eine alternierende n -lineare Form. Dann ist die **Determinante** einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ erklärt durch:

$$\Omega(Av_1, Av_2, \dots, Av_n) = \Omega(v_1, v_2, \dots, v_n) \text{Det}A. \quad (2.1)$$

$\text{Det}A$ hängt nicht von der Wahl der Volumenform Ω ab.

- (ii) Seien U und V Euklidische Vektorräume, also reelle Vektorräume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Dann ist die zu einer linearen Abbildung $L : U \rightarrow V$ **adjungierte** Abbildung $L^T : V \rightarrow U$ definiert durch:

$$\langle v, Lu \rangle_V = \langle L^T v, u \rangle_U \quad \text{für alle } u \in U, v \in V. \quad (2.2)$$

Im Fall von $U = V$ lassen sich L und L^T direkt vergleichen. Gilt $L^T = L$ (bzw. $L^T = -L$), so heißt L **symmetrisch** (bzw. **schief**).

Aufgaben. (i) $\text{Det}A^T = \text{Det}A$. (ii) Jeder linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ wird durch die Wahl einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V bekanntlich eine Matrixdarstellung zugeordnet durch $Ae_j = \sum_i e_i A_{ij}$. Aus der Definition der Determinante durch Gleichung (2.1) folgt der explizite Ausdruck

$$\text{Det}A = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) A_{\pi(1)1} A_{\pi(2)2} \cdots A_{\pi(n)n} \quad (2.3)$$

als Summe über Permutationen. (iii) Zu jeder linearen Abbildung $L : U \rightarrow V$ zwischen zwei Vektorräumen U und V existiert die transponierte (oder kanonisch adjungierte) Abbildung $L^t : V^* \rightarrow U^*$. Sind U und V Euklidisch, so gilt mit dem Isomorphismus $\mathcal{I}_V : V \rightarrow V^*, v \mapsto \langle v, \cdot \rangle_V$

$$L^T = \mathcal{I}_U^{-1} \circ L^t \circ \mathcal{I}_V. \quad (2.4)$$

(iv) Für ein Produkt AB linearer Abbildungen hat man

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad \text{Det}(AB) = \text{Det}A \cdot \text{Det}B. \quad (2.5)$$

Definition. Sei V ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die **orthogonale Gruppe** (oder Drehgruppe) $O(V)$ besteht aus den linearen Abbildungen $R : V \rightarrow V$, die das Skalarprodukt invariant lassen:

$$\langle Rv, Rv' \rangle = \langle v, v' \rangle \quad \text{für alle } v, v' \in V. \quad (2.6)$$

Die **spezielle** orthogonale Gruppe (oder eigentliche Drehgruppe) $SO(V) \subset O(V)$ ist die Untergruppe der Drehungen R mit Determinante $\text{Det}R = 1$.

Bemerkungen. Die Elemente $R \in O(V)$ werden durch die zu (2.6) äquivalente Bedingung $R^T R = \text{Id}$ charakterisiert. Für jedes $R \in O(V)$ gilt $\text{Det}R \in \{\pm 1\}$. Die Elemente mit $\text{Det}R = -1$ heißen **uneigentliche** Drehungen. Im Folgenden interessiert uns hauptsächlich die Drehgruppe für $V \simeq \mathbb{R}^3$. In diesem Fall ist die Spiegelung $R: V \rightarrow V, v \mapsto -v$ eine uneigentliche Drehung.

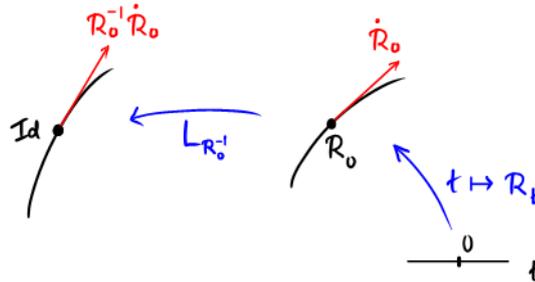
Aufgaben. (i) Für einen Euklidischen Vektorraum V endlicher Dimension liegt eine lineare Abbildung $R: V \rightarrow V$ genau dann in $O(V)$, wenn gilt $RR^T = \text{Id}$. (ii) Ist $Re_j = \sum_i e_i R_{ij}$ die Matrixdarstellung von $R \in O(V)$ bezüglich einer Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$, so gilt

$$(R^{-1})_{ij} = R_{ji}. \quad (2.7)$$

Maurer-Cartan-Form. Für eine Kurve $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow O(V), t \mapsto R_t$ durch $R_t|_{t=0} = R_0$ betrachten wir die durch

$$A = R_0^{-1} \frac{d}{dt} R_t \Big|_{t=0} \quad (2.8)$$

definierte lineare Abbildung $A: V \rightarrow V$. Wir translatieren also die Kurve durch Linksmultiplikation mit R_0^{-1} in eine Kurve $\gamma: t \mapsto R_0^{-1} R_t$ durch das neutrale Element $\text{Id} = \gamma(0)$ und bilden dann die Ableitung $A = \dot{\gamma}(0)$.



Wir behaupten, dass A schief ist. Zum Nachweis differenzieren wir die Identität $\text{Id} = R_t^{-1} R_t$ nach t an der Stelle $t = 0$ und erhalten:

$$0 = \frac{d}{dt} R_t^{-1} \Big|_{t=0} R_0 + R_0^{-1} \dot{R}_0. \quad (2.9)$$

Hiermit berechnen wir nun ausgehend von $A = R_0^{-1} \dot{R}_0$ die adjungierte Abbildung:

$$A^T = \dot{R}_0^T (R_0^{-1})^T = \frac{d}{dt} R_t^{-1} \Big|_{t=0} R_0 = -R_0^{-1} \dot{R}_0 = -A. \quad (2.10)$$

Selbstverständlich ist es unbedeutend, wo differenziert wird (in $t = 0$ oder anderswo). Insgesamt wird also jedem Paar (R, \dot{R}) eine schiefe lineare Abbildung $A = R^{-1} \dot{R}$ zugeordnet. Diese Zuordnung heißt (in einem etwas allgemeineren Kontext) die **Maurer-Cartan-Form**.

Lie-Algebra $\mathfrak{so}(V)$. Der Vektorraum aller schiefen linearen Abbildungen $A: V \rightarrow V$ wird mit dem mathematischen Symbol $\mathfrak{so}(V)$ bezeichnet. Auf ihm existiert die folgende Zusatzstruktur. Für zwei lineare Abbildungen $A: V \rightarrow V$ und $B: V \rightarrow V$ definiert man eine dritte lineare Abbildung, den sogenannten **Kommutator** $[A, B]: V \rightarrow V$, durch

$$[A, B] = AB - BA = -[B, A]. \quad (2.11)$$

Sind A und B schief, so gilt das gleiche für ihren Kommutator $[A, B]$:

$$[A, B]^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -[A, B]. \quad (2.12)$$

Der Kommutator ist also eine antisymmetrische bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{so}(V) \times \mathfrak{so}(V) \rightarrow \mathfrak{so}(V)$. Dieses nichtassoziative Produkt (oder **Lie-Klammer**) $[\cdot, \cdot]$ erfüllt die sogenannte **Jacobi-Identität**

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]] \quad (2.13)$$

und macht $\mathfrak{so}(V)$ zu einer **Lie-Algebra**.

Das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \text{Det}(\lambda \cdot \text{Id} - A)$ zu einem Element $A \in \mathfrak{so}(V)$ ist gerade (bzw. ungerade) in gerader (bzw. ungerader) Dimension $n = \dim V$:

$$\chi(\lambda) = \text{Det}(\lambda \cdot \text{Id} - A^T) = \text{Det}(\lambda \cdot \text{Id} + A) = (-1)^n \chi(-\lambda). \quad (2.14)$$

In ungerader Dimension n folgt $\chi(0) = 0$ und somit $\dim \ker A \geq 1$ für jedes $A \in \mathfrak{so}(V)$.

Modell für $\mathfrak{so}(V)$. Wir erinnern an die kanonische Identifikation

$$V \otimes V^* \xrightarrow{\sim} \text{End}(V), \quad u \otimes f \mapsto L, \quad Lv = uf(v). \quad (2.15)$$

Jede schiefe lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$ lässt sich in der Form $A = L - L^T$ für eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow V$ darstellen. Mit der Identifikation (2.15) und dem Euklidischen Isomorphismus $\mathcal{I} : V \rightarrow V^*$ können wir L und A wie folgt ausdrücken:

$$L = \sum_i u_i \otimes \mathcal{I}(v_i), \quad A = L - L^T = \sum_i (u_i \otimes \mathcal{I}(v_i) - v_i \otimes \mathcal{I}(u_i)). \quad (2.16)$$

Bemerkung. Die lineare Abbildung A von (2.16) wirkt natürlich gemäß der Formel

$$Aw = \sum_i (u_i \langle v_i, w \rangle - v_i \langle u_i, w \rangle). \quad (2.17)$$

Aufgabe. Sei $\text{Alt}^2(V^*)$ der Vektorraum der alternierenden 2-linearen Formen $V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$; er wird aufgespannt durch die äußeren Produkte $u \wedge v$ für $u, v \in V$. Die Zuordnung

$$\text{Alt}^2(V^*) \rightarrow \mathfrak{so}(V), \quad u \wedge v \mapsto u \otimes \mathcal{I}(v) - v \otimes \mathcal{I}(u) \quad (2.18)$$

ist ein Isomorphismus (von Vektorräumen). Insbesondere gilt

$$\dim \mathfrak{so}(V) = \dim \text{Alt}^2(V^*) = \frac{1}{2}n(n-1) \quad (n = \dim V). \quad (2.19)$$

Generatoren. Für eine Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V liefert die Definition

$$J_{ij} = e_i \otimes \mathcal{I}(e_j) - e_j \otimes \mathcal{I}(e_i) \quad (1 \leq j < i \leq n) \quad (2.20)$$

eine ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{so}(V)$. Die Elemente J_{ij} heißen **Generatoren**. Wendet man die Generatoren auf die zugrunde liegende Basis an, so erhält man

$$J_{ij} e_k = e_i \langle e_j, e_k \rangle - e_j \langle e_i, e_k \rangle = e_i \delta_{jk} - e_j \delta_{ik}. \quad (2.21)$$

Es folgen die Kommutator-Relationen

$$[J_{ij}, J_{kl}] = \delta_{jk}J_{il} + \delta_{il}J_{jk} - \delta_{jl}J_{ik} - \delta_{ik}J_{jl}. \quad (2.22)$$

Das negative Quadrat des Generators J_{ij} ist die **Orthogonalprojektion** auf die von e_i und e_j aufgespannte Ebene E_{ij} :

$$-J_{ij}^2 = e_i \otimes \mathcal{I}(e_i) + e_j \otimes \mathcal{I}(e_j) \equiv \Pi_{E_{ij}}. \quad (2.23)$$

2.1.1 Infinitesimale Drehungen in 3 Dimensionen

Im Rest dieses Abschnitts beschäftigen wir uns mit dem für starre Körper relevanten Spezialfall der Drehgruppe $SO(V)$ zum Euklidischen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ der **Raumtranslationen**. Wir beginnen mit einigen Aussagen über die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(V)$.

Im Fall von $V = \mathbb{R}^3$ verwendet man die Kurzschreibweise $\mathfrak{so}(\mathbb{R}^3) = \mathfrak{so}(3)$. Die Dimension der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ ist $3 \cdot (3 - 1)/2 = 3$. Bezüglich der **Standardbasis**

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

hat man den Satz von Generatoren

$$J_{21} = e_2 \otimes \mathcal{I}(e_1) - e_1 \otimes \mathcal{I}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (1 \ 0 \ 0) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Aufgabe. Im \mathbb{R}^3 kennt man das **Vektorprodukt** (oder Kreuzprodukt) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dieses nichtassoziative Produkt verleiht \mathbb{R}^3 die Struktur einer Lie-Algebra. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3), \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

ist ein (nicht kanonisch erklärter) Isomorphismus von Lie-Algebren.

Kern von $A \in \mathfrak{so}(3)$. Das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \text{Det}(\lambda \cdot \text{Id} - A)$ zu $A \in \mathfrak{so}(V)$ für $\dim V = 3$ ist, wie oben gezeigt, ungerade, also von der Form $\chi(\lambda) = \lambda^3 + c\lambda$. Wenn A von der Null-Abbildung verschieden ist, dann führt die Annahme $c = 0$ schnell zu einem Widerspruch. In diesem Fall gilt also $c \neq 0$ und $\ker A$ ist eindimensional. Sei nun $\text{im} A$ das Bild von V unter A .

Aufgaben. (i) Die Teilräume $\ker A$ und $\text{im} A$ sind A -invariant, orthogonal und spannen V auf:

$$V = \ker A \oplus \text{im} A. \quad (2.27)$$

(ii) Die Einschränkung $A' = A|_E$ von A auf die Ebene $E \equiv \text{im} A$ (für $A \neq 0$) ist schief bezüglich des auf E eingeschränkten Skalarprodukts von V . (iii) Jedes $v \in E$ ist orthogonal zu $A'v \in E$.

Untersuchung von A' . Wir betrachten jetzt die eingeschränkte Abbildung $A' = -(A')^T$ genauer. Vorab stellen wir fest, dass A' (über \mathbb{R}) **nicht diagonalisierbar** ist; in der Tat gibt die Annahme $A'v = \lambda v$ für $v \neq 0$ sofort einen Widerspruch zur Orthogonalität von v mit $A'v$. Als nächstes bemerken wir, dass $\langle u, A'u \rangle = 0$ durch die Substitution $u = A'v$ die Relation $\langle A'v, A'(A'v) \rangle = 0$ nach sich zieht. Wegen $\dim E = 2$ folgt die lineare Abhängigkeit von v und $A'(A'v)$. Jeder Vektor $v \in E$ ist also ein Eigenvektor von A'^2 . Letzteres erzwingt, dass A'^2 ein Vielfaches der Eins ist:

$$A'^2 = \lambda \text{Id}_E. \quad (2.28)$$

Der Eigenwert λ ist immer negativ, denn

$$\lambda|v|^2 = \langle v, A'^2v \rangle = -\langle A'v, A'v \rangle \leq 0. \quad (2.29)$$

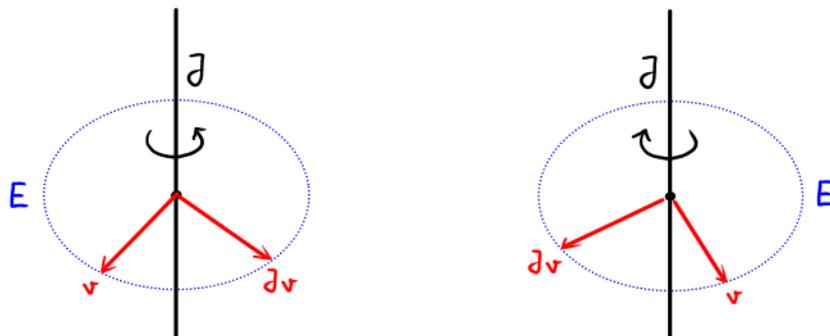
Nun bilden für ein beliebiges, fest gewähltes $v \neq 0$ die Vektoren $e_1 = v/|v|$ und $e_2 = A'v/|A'v|$ eine Orthonormalbasis von E . Mit der Definition $|A| := \sqrt{-\lambda} = |A'v|/|v|$ folgt

$$A'e_1 = e_2|A|, \quad A'e_2 = -e_1|A|. \quad (2.30)$$

Normalform. Wir fassen zusammen. Zu jeder Abbildung $A \in \mathfrak{so}(V)$, $A \neq 0$, für $\dim V = 3$ existieren die folgenden Daten: eine positive Zahl $|A|$, eine zum Kern von A orthogonale Ebene $E = \text{im} A$ (mit Orthogonalprojektor, für den wir die Bezeichnung Π_E einführen) und ein Generator $J = A/|A| \in \mathfrak{so}(V)$ mit Quadrat $J^2 = -\Pi_E$. In diesen Daten ausgedrückt hat A die Normalform

$$A = |A| J. \quad (2.31)$$

Die im Generator J kodierte geometrische Information besteht aus einer **Nullachse** ($\ker A = \ker J$) und einem von zwei möglichen **Drehsinnen** ($Je_1 = e_2$ oder $Je_2 = e_1$).



2.1.2 Eigentliche Drehungen in 3 Dimensionen

Nach der obigen Diskussion von infinitesimalen Drehungen $A \in \mathfrak{so}(V)$ wenden wir uns jetzt den endlichen Drehungen $R \in \text{SO}(V)$ zu. Als erste Aussage zeigen wir:

$$\boxed{\text{Jede eigentliche Drehung in 3 Dimensionen hat eine Drehachse.}} \quad (2.32)$$

Gemeint ist, dass jede Drehung $R \in \text{SO}(V)$ für $\dim V = 3$ einen **invarianten** Vektor besitzt, d.h. einen Vektor $v \in V$ mit $Rv = v$. Zum Beweis betrachten wir wieder das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \text{Det}(\lambda \cdot \text{Id} - R) = \lambda^3 + \dots - \text{Det} R. \quad (2.33)$$

Aus $\chi(0) = -\text{Det}R = -1$ und $\chi(+\infty) = +\infty$ folgt aufgrund der Stetigkeit der Funktion $\lambda \mapsto \chi(\lambda)$ die Existenz (mindestens) eines Eigenwerts im Intervall $(0, \infty)$. Sei $\lambda > 0$ dieser Eigenwert: $Rv = \lambda v$. Mit der Relation $\langle v, v \rangle = \langle Rv, Rv \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$ schließen wir dann $\lambda = +1$.

Aufgabe. Der Raum der invarianten Vektoren von $R \in \text{SO}(\mathbb{R}^3)$, $R \neq \text{Id}$, ist eindimensional.

Bestimmung der Drehachse. Wie lässt sich die Drehachse zu einem vorgegebenen R finden? Nun, man löst eben die Gleichung $Rv = v$. Alternativ folgert man aus $Rv = v$ die Gleichung $v = R^{-1}v = R^T v$ und erkennt, dass jeder invariante Vektor $v = Rv$ im Kern der schiefen Abbildung $R - R^T$ liegt. Die Drehachse von R fällt also mit der Nullachse von $R - R^T$ zusammen.

Normalform. Aufbauend auf der Normalform (2.31) für $A \in \mathfrak{so}(V)$ geben wir eine Normalform für eigentliche Drehungen $R \in \text{SO}(V)$ an (immer unter der Annahme $V \simeq \mathbb{R}^3$). Sei dazu A die schiefe lineare Abbildung

$$A := \frac{1}{2}(R - R^T) = |A| J \quad (J^2 = -\Pi_E). \quad (2.34)$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation $R^T R = \text{Id} = R R^T$ verifiziert man leicht, dass der Kommutator von $S := \frac{1}{2}(R + R^T)$ mit J verschwindet, d.h. es gilt $SJ = JS$. Hieraus folgt nach kurzer Rechnung (oder durch geometrische Überlegung), dass die symmetrische lineare Abbildung $S = S^T$ eine Linearkombination der Orthogonalprojektoren auf die Drehebene E und auf die Drehachse (oder Nullachse von $J \propto A$) sein muss:

$$S = c_1 \cdot \Pi_E + c_2 \cdot (\text{Id} - \Pi_E). \quad (2.35)$$

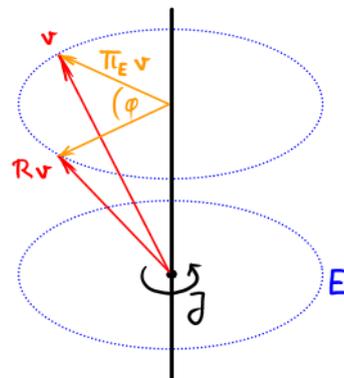
Für $v = Rv = R^T v$ auf der Drehachse hat man $Sv = v$ und $\Pi_E v = 0$ und somit (durch Koeffizientenvergleich) $c_2 = 1$. Insgesamt entsteht also der Ausdruck

$$R = \frac{1}{2}(R + R^T) + \frac{1}{2}(R - R^T) = S + A = \text{Id} - \Pi_E + c_1 \Pi_E + |A| J. \quad (2.36)$$

Mit $J^T = -J$ ergibt sich durch Nullsetzen des Koeffizienten von Π_E in $R^T R - \text{Id} = 0$ die Beziehung $c_1^2 + |A|^2 = 1$. Demgemäß existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $\varphi \in [0, \pi]$ mit $c_1 = \cos \varphi$ und $|A| = \sin \varphi$. Hiermit erhalten wir schließlich die folgende **Normalform für R** :

$$R = \text{Id} - \Pi_E + \cos(\varphi) \Pi_E + \sin(\varphi) J. \quad (2.37)$$

Die Geometrie auf der rechten Seite dieses Ausdrucks ist klar: $\text{Id} - \Pi_E$ projiziert auf die durch J kodierte Drehachse, und die verbleibenden zwei Terme bestimmen eine Drehung durch den Winkel φ in der zur Drehachse senkrechten Ebene E mit dem Drehsinn von J .



Aufgabe. Es gilt die Formel $R = \exp(\varphi J)$.

Matrixdarstellung. Sei e_3 ein Einheitsvektor auf der Drehachse von $R \in \text{SO}(V)$, $V \simeq \mathbb{R}^3$, und $\{e_1, e_2 = J e_1\}$ eine Orthonormalbasis für die zur Drehachse $\mathbb{R} \cdot e_3$ senkrechte Ebene E . Dann gilt:

$$R e_1 = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi, \quad R e_2 = -e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi, \quad R e_3 = e_3, \quad (2.38)$$

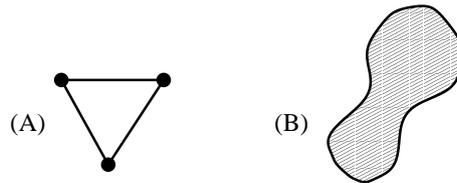
oder in Matrixdarstellung bezüglich $\{e_1, e_2, e_3\}$ als Standardbasis von $V = \mathbb{R}^3$:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

2.2 Kinematik starrer Körper: Winkelgeschwindigkeit

Wir betrachten im Folgenden zwei mathematische Idealisierungen realer Körper, die wir den **starreren Körper** nennen:

- (A) Ein System von N Punkten mit Massen m_1, m_2, \dots, m_N , deren Abstände konstant sind.
- (B) Eine starre Massenverteilung ρ .



Die Gesamtmasse ist $M = \sum_{i=1}^N m_i$ im Modell (A) und $M = \int_{\mathbb{R}^3} \rho$ im Modell (B).

Konfigurationsraum. Der koordinatenfreien Untersuchung der Kinematik und Dynamik starrer Körper legen wir den dreidimensionalen Euklidischen Raum E_3 mit Differenzvektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ zugrunde. Zur Buchführung über die räumliche Lage des starren Körpers treffen wir als erstes die Wahl eines **Aufpunkts**, d.h. eines ausgewählten, mit dem starren Körper fest verbundenen Punkts. Der Ort des Aufpunkts zur Zeit t sei mit $\alpha(t) \in E_3$ bezeichnet. Da alle anderen Punkte $\gamma_i(t)$ des Körpers ($i = 1, \dots, N$ im Modell (A)) mit dem Aufpunkt $\alpha(t)$ starr verbunden sind, ergeben sich ihre Ortsvektoren bzgl. $\alpha(t)$ aus (ein und derselben) Drehung $R(t) : V \rightarrow V$ der Anfangsdifferenz $\gamma_i(0) - \alpha(0)$; somit gilt $\gamma_i(t) - \alpha(t) = R(t)(\gamma_i(0) - \alpha(0))$, oder in aufgelöster Form

$$\gamma_i(t) = \alpha(t) + R(t)(\gamma_i(0) - \alpha(0)). \quad (2.40)$$

Das Paar $(\alpha(t) - \alpha(0), R(t))$ einer Translation $\alpha(t) - \alpha(0) \in V$ des Aufpunkts zusammen mit einer eigentlichen Drehung $R(t) \in \text{SO}(V)$ bestimmt zu jeder festen Zeit t ein Element der Gruppe Euklidischer Bewegungen. Der **Konfigurationsraum** (d.h. der Raum der verallgemeinerten Ortskoordinaten) des starren Körpers ist also die Euklidische Bewegungsgruppe. Er ist sechsdimensional.

Wahl des Aufpunkts. Für die optimale Wahl des Aufpunkts sind dynamische Aspekte zu berücksichtigen. Ist das System abgeschlossen, d.h. wirken auf den starren Körper keine äußeren

Kräfte, so wählt man für den Aufpunkt am besten den Schwerpunkt. Wird der starre Körper an einem seiner Punkte festgehalten, dann liegt es nahe, diesen ausgezeichneten Punkt als Aufpunkt zu wählen. Aus rein kinematischer Sicht ist die Wahl des Aufpunkts allerdings willkürlich.

Hinweis. Ändert man den Aufpunkt (z.B. in α' statt α), dann wird (2.40) zu

$$\gamma_i(t) = \alpha'(t) + R(t)(\gamma_i(0) - \alpha'(0)), \quad \alpha'(t) = \alpha(t) + R(t)(\alpha'(0) - \alpha(0)).$$

Der translatorische Anteil der Euklidischen Bewegung wird also geändert, während der Drehanteil $R(t)$ gleich bleibt. Wie wir schon wissen, gilt die letztere Eigenschaft ganz allgemein für den linearen Teil (oder das Differential) jeder Galilei-Transformation; vgl. Gleichung (1.8).

Winkelgeschwindigkeit. Nun setzen wir $q(t) := \gamma_i(t) - \alpha(t)$, $q := \gamma_i(0) - \alpha(0)$ (für irgendeinen Punkt γ_i des starren Körpers) und bringen (2.40) hiermit in die Form

$$q(t) = R(t)q. \tag{2.41}$$

Differenzieren nach der Zeit gibt $\dot{q}(t) = \dot{R}(t)q = (\dot{R}(t)R(t)^{-1})R(t)q$ oder

$$\dot{q}(t) = \omega(t)q(t), \quad \omega(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1}. \tag{2.42}$$

Mit dem gleichen Argument wie in (2.10) von Abschn. 2.1 ist $\omega(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1} : V \rightarrow V$ schieb:

$$\omega(t)^T = -\omega(t) \in \mathfrak{so}(V). \tag{2.43}$$

Diese schiefe lineare Abbildung $\omega(t)$ heißt die **momentane Winkelgeschwindigkeit** des starren Körpers. Wir betonen, dass $\omega(t)$ wie $R(t)$ invariant erklärt ist und insbesondere (wie $R(t)$) nicht von der Wahl des Aufpunkts abhängt.

Interpretation. Zur unmittelbaren Deutung von ω nehmen wir den Aufpunkt als ruhend an (oder besser: wir betrachten die Bewegung des starren Körpers aus der Perspektive des Aufpunkts). Wir setzen also $\alpha(t) = \alpha(0) = \text{const}$ in Gleichung (2.40). Die Geschwindigkeit $\dot{q} = \omega q$ ist dann identisch zur totalen Geschwindigkeit des Körperpunkts $\gamma(t)$ mit Ortsvektor $q(t) = \gamma(t) - \alpha(0)$ relativ zum Aufpunkt (die Indizierung durch i wird hier unterdrückt). In dieser Situation hat die uns als Normalform bekannte Zerlegung

$$\omega(t) = |\omega(t)|J(t) \tag{2.44}$$

die folgende Bedeutung. Betrachte die von $J(t)$ bestimmte Gerade

$$D(t) = \alpha(0) + \mathbb{R} \cdot \ker J(t) \tag{2.45}$$

durch den ruhenden Aufpunkt $\alpha(t) = \alpha(0)$. Der Ortsvektor $q(t) = \gamma(t) - \alpha(0)$ jedes Punkts $\gamma(t) \in D(t)$ liegt in der Nullachse von $J(t)$. Alle solche Punkte haben Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t) = 0$ und befinden sich somit in einem Zustand momentaner Ruhe. Die Gerade $D(t)$ ist also die **momentane Drehachse** des starren Körpers. Punkte $\gamma(t) \notin D(t)$ haben eine Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t) = |\omega(t)|J(t)q(t)$, die senkrecht zur Drehachse und senkrecht zum projizierten Ortsvektor

$\Pi_{E(t)} q(t)$ steht. Der Betrag der Geschwindigkeit ist das Produkt $|\dot{\gamma}(t)| = |\omega(t)| |\Pi_{E(t)} q(t)|$ aus dem Betrag $|\omega(t)|$ der momentanen Winkelgeschwindigkeit und dem Abstand $|\Pi_{E(t)} q(t)|$ von der momentanen Drehachse.

Hinweis. Man nennt $\omega = \dot{R}R^{-1}$ auch die Winkelgeschwindigkeit bezüglich des **raumfesten** Systems. Hingegen heißt $\tilde{\omega} = R^{-1}\dot{R}$ die Winkelgeschwindigkeit bzgl. des **körperfesten** Systems. Diese Sprechweisen machen Sinn, wenn alle Größen bezüglich eines raumfesten bzw. körperfesten Koordinatensystems ausgedrückt werden (was wir hier nicht tun, da wir koordinatenfrei arbeiten).

Drehimpuls. Wir suchen jetzt noch den Anschluss an eine uns schon bekannte Größe. Für diesen Zweck muss vorab geklärt werden, wie man ein Element $A \in \text{End}(V^*)$ mit einem Element $B \in \text{End}(V)$ paart (dabei ist eine Normierungskonstante zu wählen). Die richtige Antwort lautet

$$A(B) = \frac{1}{2} \text{Tr}(A^t B), \quad (2.46)$$

wobei $\text{Tr}(A^t B)$ die **Spur** der linearen Abbildung $A^t B : V \rightarrow V$ bezeichnet. Hiermit berechnen wir nun die Paarung des in (1.57) definierten Drehimpulses $L \in \mathfrak{so}(3)^*$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \in \mathfrak{so}(3)$. Mit Hilfe der Relationen $(p_i \otimes q_i)^t = q_i \otimes p_i$ und $\text{Tr}((q_i \otimes p_i)\omega) = p_i(\omega q_i)$ erhalten wir

$$L(\omega) \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(L^t \omega) = \frac{1}{2} \sum_i p_i(\omega q_i) - \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{I}(q_i) (\omega \mathcal{I}^{-1}(p_i)). \quad (2.47)$$

Der erste Term ist gleich der kinetischen Energie T des starren Körpers:

$$\frac{1}{2} \sum_i p_i(\omega q_i) = \frac{1}{2} \sum_i \langle m_i \dot{q}_i, \omega q_i \rangle = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{q}_i|^2 = T, \quad (2.48)$$

und auch der zweite Term gibt diesen Beitrag:

$$- \sum_i \mathcal{I}(q_i) (\omega \mathcal{I}^{-1}(p_i)) = - \sum_i m_i \langle q_i, \omega \dot{q}_i \rangle = + \sum_i m_i \langle \omega q_i, \dot{q}_i \rangle = 2T. \quad (2.49)$$

Insgesamt haben wir also $L(\omega) = 2T$. Dieses Ergebnis macht deutlich, dass Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit in derselben Beziehung zueinander stehen wie Impuls und Geschwindigkeit: die **Paarung** der einen Größe mit der anderen ergibt jeweils die (verdoppelte) kinetische Energie.

2.3 Kinematik: Trägheitstensor

Den nachfolgenden Betrachtungen legen wir fürs erste die mathematische Idealisierung (A) zugrunde. Für die Geschwindigkeit des i -ten Punkts des starren Körpers ergibt sich durch Bilden der Zeitableitung von (2.40) der Ausdruck

$$\dot{\gamma}_i(t) = \dot{\alpha}(t) + \dot{R}(t)(\gamma_i(0) - \alpha(0)). \quad (2.50)$$

Ein zentraler Begriff in der Theorie des starren Körpers ist der des Trägheitstensors. Um ihn einzuführen, betrachten wir (2.50) zunächst für $\dot{\alpha}(t) = 0$, d.h. der Aufpunkt befinde sich in Ruhe. Mit Gleichung (2.42), also mit $\dot{\gamma}_i(t) = \omega(t) q_i(t)$, haben wir dann (wie oben)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\gamma}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\omega(t) q_i(t)|^2. \quad (2.51)$$

Wie zuvor sind $q_i(t) = \gamma_i(t) - \alpha(0)$ die zeitabhängigen Ortsvektoren bezüglich des Aufpunkts. Offenbar ist die kinetische Energie T des starren Körpers eine über die Ortsvektoren $q_i(t)$ explizit zeitabhängige quadratische Form in der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$. Um zu einer zeitunabhängigen Form zu gelangen, wechselt man von der "raumbezogenen" Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{R}R^{-1}$ zur "körperbezogenen" Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\omega} = R^{-1}\dot{R}$ mittels der Relation $|\omega(t) q_i(t)| = |\tilde{\omega}(t) q_i(0)|$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\tilde{\omega}(t) q_i(0)|^2. \quad (2.52)$$

Etwas anders aufgeschrieben haben wir

$$T = \frac{1}{2} I(\tilde{\omega}(t), \tilde{\omega}(t)), \quad I(\xi, \eta) = \sum_i m_i \langle \xi q_i(0), \eta q_i(0) \rangle. \quad (2.53)$$

Definition. Die (zeitunabhängige) symmetrische Bilinearform

$$I^{(\alpha)} \equiv I : \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\xi, \eta) \mapsto I(\xi, \eta), \quad (2.54)$$

heißt der *Trägheitstensor* des starren Körpers relativ zum Aufpunkt α . (Wir erinnern daran, dass der Aufpunkt in den Ausdruck in (2.53) über die Ortsvektoren $q_i = \gamma_i - \alpha$ eingeht.) Seinen Wert $I_J \equiv I(J, J)$ auf einem Generator $J \in \mathfrak{so}(3)$ nennen wir das *Trägheitsmoment* bezüglich der J -Achse (d.h. bzgl. der Achse durch α in Richtung des Nullraums $\ker J$).

Bemerkung. Alternativ lässt sich der Trägheitstensor als quadratische Form auffassen. (Übrigens ist I differentialgeometrisch gesprochen eine linksinvariante quadratische Form auf dem Tangentialbündel von $SO(3)$.)

Trägheitsmoment. Zum Generator $J = -J^T \in \mathfrak{so}(3)$ einer Drehung berechnen wir jetzt das Trägheitsmoment I_J bezüglich der J -Achse, wie folgt. Wie zuvor sei $J^2 = -\Pi_E$. Dann ist

$$I_J = I(J, J) = \sum_i m_i |J q_i|^2 = \sum_i m_i \langle q_i, J^T J q_i \rangle = \sum_i m_i \langle q_i, \Pi_E q_i \rangle. \quad (2.55)$$

Benützen wir jetzt noch $\Pi_E = \Pi_E^2$ und $\Pi_E^T = (-J^2)^T = -(J^T)^2 = -J^2 = \Pi_E$, so erhalten wir

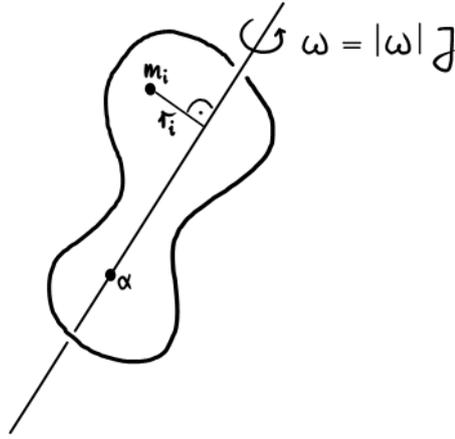
$$I_J = \sum_i m_i \langle q_i, \Pi_E^2 q_i \rangle = \sum_i m_i \langle \Pi_E q_i, \Pi_E q_i \rangle. \quad (2.56)$$

Im Modell (A) resultiert hiermit die Formel

$$T = \frac{1}{2} I_J |\omega|^2, \quad I_J = \sum_i m_i r_i^2, \quad r_i = |\Pi_E q_i|, \quad (2.57)$$

wobei die Größen r_i die *Abstände* von der Drehachse sind. Im Modell (B) ist die Summe über $i = 1, \dots, N$ natürlich durch das Integral gegen die Massendichte ρ (mit dem Quadrat r^2 des Abstands von der Drehachse als Integranden) zu ersetzen:

$$I_J = \int r^2 \rho. \quad (2.58)$$



Satz von Steiner. Wir fragen nun, wie sich der Trägheitstensor I unter einer Verschiebung des Aufpunkts ändert. Diese Frage hat eine einfache Antwort, falls wir vom **Schwerpunkt** Γ als Aufpunkt zu einer beliebigen Stelle α als Aufpunkt übergehen. Seien also $I^{(\Gamma)}$ und $I^{(\alpha)}$ die Trägheitstensoren bezüglich Γ bzw. α . Mit $\alpha = \Gamma + a$ erhalten wir im Modell (A)

$$\begin{aligned} I^{(\alpha)}(\xi, \eta) &= \sum_i m_i \langle \xi (\gamma_i - \Gamma - a), \eta (\gamma_i - \Gamma - a) \rangle \\ &= I^{(\Gamma)}(\xi, \eta) - \sum_i m_i \langle \xi (\gamma_i - \Gamma), \eta a \rangle - \sum_i m_i \langle \xi a, \eta (\gamma_i - \Gamma) \rangle + M \langle \xi a, \eta a \rangle. \end{aligned}$$

Die beiden mittleren Terme in der zweiten Zeile verschwinden wegen $\sum_i m_i (\gamma_i - \Gamma) = 0$ per Definition des Schwerpunkts. Es resultiert somit die Formel **(Steiner)**

$$I^{(\alpha)}(\xi, \eta) = I^{(\Gamma)}(\xi, \eta) + M \langle \xi a, \eta a \rangle. \quad (2.59)$$

Als spezielle Konsequenz hat man: ist $|a_\perp| = |\Pi_E a|$ die Länge des auf die Drehebene E ($J^2 = -\Pi_E$) projizierten Differenzvektors $a = \alpha - \Gamma$, so hängen die Trägheitsmomente bezüglich der Drehachse J wie folgt zusammen:

$$I_J^{(\alpha)} = I_J^{(\Gamma)} + M |a_\perp|^2. \quad \square \quad (2.60)$$

Befindet sich der starre Körper in Bewegung, so sind seine Trägheitsmomente bezüglich raumfester Achsen J im allgemeinen zeitabhängig. Hingegen ist das Trägheitsmoment bezüglich jeder körperfesten Achse zeitunabhängig. Mit elementaren Methoden der linearen Algebra zeigt man:

Satz. Für jeden starren Körper existiert ein Orthonormalsystem von körperfesten (Dreh-)Achsen J_ν ($\nu \in \{21, 13, 32\}$), welches den Trägheitstensor $I^{(\alpha)} \equiv I$ (zum Aufpunkt α) diagonalisiert:

$$I(J_\mu, J_\nu) = I_\nu \delta_{\mu\nu}, \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(J_\mu^T J_\nu) = \delta_{\mu\nu}. \quad (2.61)$$

Definition. Wählt man den Schwerpunkt Γ als Aufpunkt, so heißen die Zahlen I_ν ($\nu \in \{21, 13, 32\}$) die **Hauptträgheitsmomente** und die Drehachsen J_ν die **Haupt(trägheits)achsen** des starren Körpers. Den starren Körper mit drei verschiedenen Hauptträgheitsmomenten nennen wir den unsymmetrischen **Kreisel**. Sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich, spricht man vom symmetrischen Kreisel. Der total entartete Fall von drei gleichen Hauptträgheitsmomenten heißt der Kugelkreisel.

Bemerkungen. (i) Im Fall des symmetrischen Kreisels und des Kugelkreisels sind die Hauptträgheitsachsen nicht eindeutig bestimmt. (ii) Jeder starre Körper mit kubischer Symmetrie (z.B. ein Würfel) ist ein Kugelkreisel.

Zerlegung von T . Um möglicher Verwirrung vorzubeugen, gehen wir jetzt zu einer aufwändigeren Notation für den Trägheitstensor über. Wir schreiben $I \equiv I^K$ für den bislang betrachteten, körperbezogenen (und zeitunabhängigen) Trägheitstensor. Mit $I^R \equiv I^{R(t)}$ bezeichnen wir sein raumbezogenes (und i.a. explizit zeitabhängiges) Analogon. Zwischen I^K und I^R besteht der **Zusammenhang** $I^R(\omega, \omega) = I^K(\tilde{\omega}, \tilde{\omega})$ oder (mit $\omega R = \dot{R} = R\tilde{\omega}$)

$$I^R(\xi, \eta) = I^K(R^{-1}\xi R, R^{-1}\eta R), \quad (2.62)$$

was die explizite Zeitabhängigkeit (über $R = R(t)$) von I^R sichtbar macht.

Nun legen wir den Aufpunkt α in den **Schwerpunkt** Γ des starren Körpers, und wir erinnern an die Beziehungen

$$\gamma_i(t) = \Gamma(t) + R(t)(\gamma_i(0) - \Gamma(0)), \quad \dot{\gamma}_i - \dot{\Gamma} = \omega(\gamma_i - \Gamma).$$

Die kinetische Energie T des starren Körpers hat dann die Zerlegung

$$T = T_t + T_r, \quad (2.63)$$

wobei $T_t = \frac{1}{2}M|\dot{\Gamma}|^2$ die kinetische Energie der **Translationsbewegung** des Schwerpunkts und $T_r = \frac{1}{2}I^R(\omega, \omega) = \frac{1}{2}I^K(\tilde{\omega}, \tilde{\omega})$ die kinetische Energie der **Drehbewegung** um den Schwerpunkt ist (also mit dem Schwerpunkt als Aufpunkt in der Definition des Trägheitstensors $I \equiv I^K$). Die Zerlegung (2.63) ergibt sich durch kurze Rechnung:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{\Gamma} + (\dot{\gamma}_i - \dot{\Gamma})|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{\Gamma} + \omega(\gamma_i - \Gamma)|^2 \\ &= \frac{1}{2}M|\dot{\Gamma}|^2 + \sum_i m_i \langle \dot{\Gamma}, \omega(\gamma_i - \Gamma) \rangle + \frac{1}{2} \sum_i m_i |\omega(\gamma_i - \Gamma)|^2 = T_t + T_r. \end{aligned}$$

Der Mischterm verschwindet wegen $\sum_i m_i(\gamma_i - \Gamma) = 0$ per Definition des Schwerpunkts.

Zerlegung von L . Der Drehimpuls $L \equiv L^{(\alpha)}$ des starren Körpers relativ zum Aufpunkt α hat die Zerlegung

$$L = L_t + L_r, \quad (2.64)$$

wobei $L_t = P \otimes (\Gamma - \alpha) - \mathcal{I}(\Gamma - \alpha) \otimes \mathcal{I}^{-1}(P)$ der Drehimpuls des Schwerpunkts Γ relativ zum Aufpunkt α und $L_r \equiv L^{(\Gamma)}$ der Drehimpuls des starren Körpers relativ zum Schwerpunkt Γ ist. Der Nachweis gelingt wieder durch kurze Rechnung:

$$\begin{aligned} L &= \sum_i p_i \otimes q_i - \sum_i \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p_i) = \sum_i m_i \mathcal{I}(\dot{\Gamma} + (\dot{\gamma}_i - \dot{\Gamma})) \otimes ((\Gamma - \alpha) + (\gamma_i - \Gamma)) - \dots \\ &= M\mathcal{I}(\dot{\Gamma}) \otimes (\Gamma - \alpha) + \sum_i m_i \mathcal{I}(\dot{\gamma}_i - \dot{\Gamma}) \otimes (\gamma_i - \Gamma) - \dots = L_t + L_r. \end{aligned}$$

Auch hier verschwinden die Mischterme wegen $\sum_i m_i(\gamma_i - \Gamma) = 0 = \sum_i m_i(\dot{\gamma}_i - \dot{\Gamma})$.

Durch die gleiche Überlegung wie am Ende von Abschnitt 2.2 zeigt man $L_r(\omega) = 2T_r$. Hieraus folgt mit $T_r = \frac{1}{2}I^R(\omega, \omega)$ die Beziehung

$$L_r = I^R(\omega, \cdot). \quad (2.65)$$

In diesem Kontext fungiert der Trägheitstensor als **symmetrische Abbildung** $I^R : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$, welche die Winkelgeschwindigkeit $\omega \in \mathfrak{so}(3)$ in den Drehimpuls $L_r \in \mathfrak{so}(3)^*$ umwandelt.

2.4 Der freie Kreisel: geometrische Konstruktion

In Abwesenheit von äußeren Kräften bewegt sich der Schwerpunkt des starren Körpers geradlinig und gleichförmig: $\ddot{\Gamma} = 0$. In diesem Fall gilt:

$$\frac{d}{dt} T_t = 0, \quad \frac{d}{dt} L_t = 0. \quad (2.66)$$

Aus den Erhaltungssätzen für Energie ($\dot{T} = 0$) und Drehimpuls ($\dot{L} = 0$) folgt dann:

$$\frac{d}{dt} T_r = \frac{d}{dt} (T - T_t) = 0, \quad \frac{d}{dt} L_r = \frac{d}{dt} (L - L_t) = 0. \quad (2.67)$$

Für das Folgende ist es geschickt, den Bezugspunkt α mit dem Schwerpunkt Γ zu **identifizieren**. Dann ist $T_t = 0$, $L_t = 0$ und $T_r = T$, $L_r = L$. In diesem Fall lassen sich die Erhaltungssätze für die Energie und den Drehimpuls,

$$2T = I^R(\omega, \omega) = L(\omega) = \text{const}, \quad L = I^R(\omega, \cdot) = \text{const}, \quad (2.68)$$

in der folgenden Weise geometrisch deuten.

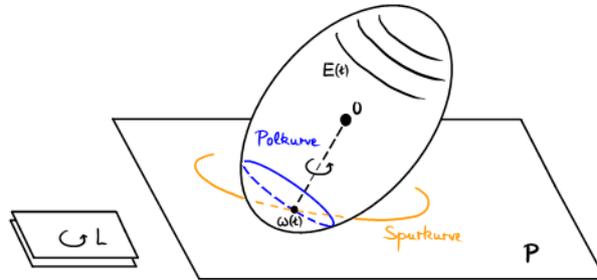
Invariable Ebene. Die Lösungsmenge (für ω als Unbekannte) der Gleichung $L(\omega) = \text{const}$ ist eine Ebene, P , im 3-dimensionalen Raum der Winkelgeschwindigkeiten $\omega \in \mathfrak{so}(3)$. Da der Drehimpuls L nicht von der Zeit abhängt, ist diese Ebene **P invariabel**, d.h. zeitunabhängig.

Energieellipsoid. Der Energiesatz, $2T(\omega) = I^R(\omega, \omega) = \text{const}$, hat als Lösungsmenge (wieder für ω als Unbekannte) eine elliptische Fläche, das sogenannte **“Energieellipsoid”** $E(t)$. Da der raumbezogene Trägheitstensor $I^R = I^{R(t)}$ mit der Zeit variiert, ist die Lage des Energieellipsoids nicht invariabel, sondern zeitabhängig. Allerdings ist die Gestalt des Energieellipsoids invariabel, denn die Eigenwerte der raumbezogenen quadratischen Form $\omega \mapsto I^R(\omega, \omega) = I^K(R^{-1}\omega R, R^{-1}\omega R)$ sind unabhängig von der Zeit gleich den Hauptträgheitsmomenten I_ν des Trägheitstensors $I \equiv I^K$.

Satz von Poinsot. Die momentane Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ unterliegt also zwei Bedingungen: einerseits liegt sie in der invariablen Ebene P , andererseits in der formfesten aber positionsvariablen Fläche des Energieellipsoids $E(t)$. Wie stehen nun P und $E(t)$ zueinander? Wegen $L = I^R(\omega, \cdot) = (dT)_\omega$ ist die **Tangentialebene** von $E(t)$ im Punkt $\omega(t)$ parallel zur invariablen Ebene P . Da $\omega(t)$ sowohl in P wie in $E(t)$ enthalten ist, folgt aus dieser Parallelität, dass sich P und E in $\omega(t)$ und nur in diesem Punkt berühren. Da $\omega(t)$ zudem in Richtung der momentanen Drehachse (im Ortsraum E_3) zeigt und die gleiche Drehachse (nach Übertragung in den Raum

$\mathfrak{so}(3)$ der Winkelgeschwindigkeiten) die Bewegung des Energieellipsoids steuert, ist der Punkt $\omega(t)$ der Berührung von P und $E(t)$ **momentan in Ruhe** und es gilt (Poincot):

$$\boxed{\text{Das Energieellipsoid rollt ohne Schlupf auf der invariablen Ebene.}} \quad (2.69)$$



Kommentare. Die Kurve, die durch den Berührungspunkt auf dem Energieellipsoid beschrieben wird, heißt **Polkurve**. Die entsprechende Kurve auf der invariablen Ebene nennt man **Spurkurve**. Bei gegebenen Anfangsbedingungen ist es ein rein geometrisches Problem, Spurkurve und Polkurve zu bestimmen. Damit kennt man die Bahn $t \mapsto \omega(t)$, ohne den zeitlichen Verlauf zu kennen. Für den symmetrischen Kreisel ist das Energieellipsoid ein **Rotationsellipsoid**, und Polkurve und Spurkurve sind Kreise. Das Energieellipsoid des Kugelkreisels ist eine Kugeloberfläche. In diesem Fall folgt aus der geometrischen Konstruktion von Poincot: $\omega(t) = \text{const}$; ein kräftefreier Kugelkreisel rotiert also immer um eine feste Achse mit fester Winkelgeschwindigkeit.

Mitteilung. Wie nach der analytischen Lösung im Abschnitt 2.5 klar sein wird, ist die Polkurve geschlossen, während die Spurkurve im allgemeinen nicht geschlossen ist.

2.5 Die Eulerschen Gleichungen

Als Ausgangspunkt für die Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen des starren Körpers benutzen wir den Impulssatz und den Drehimpulssatz in der Form

$$M\ddot{\Gamma} = F^{(\text{ext})}, \quad \dot{L} = D, \quad (2.70)$$

wobei $F^{(\text{ext})}$ die Summe der äußeren Kräfte und $D = D^{(\Gamma)}$ und $L \equiv L^{(\Gamma)}$ das gesamte Drehmoment bzw. der gesamte Drehimpuls bezüglich des Schwerpunkts Γ sind. Die Gleichungen (2.70) konstituieren ein System von **sechs Differentialgleichungen** zweiter Ordnung in der Zeitvariablen t für die verallgemeinerten Koordinaten des starren Körpers, nämlich für das Element $(\Gamma(t) - \Gamma(0), R(t))$ der Euklidischen Bewegungsgruppe.

Übertragung. Es ist zweckmäßig, die Gleichung $\dot{L} = D$ ins körperfeste System zu übertragen. Dazu führen wir den **körperbezogenen** Drehimpuls \tilde{L} ein durch

$$\tilde{L}(\tilde{\omega}) = L(\omega) = L(R\tilde{\omega}R^{-1}) = \frac{1}{2}\text{Tr}(R^{-1}L^tR\tilde{\omega}), \quad (2.71)$$

mit dem Ergebnis $\tilde{L} = R^t L (R^t)^{-1}$. Analog hat man für das körperbezogene Drehmoment die Übertragungsformel $\tilde{D} = R^t D (R^t)^{-1}$. Hiermit berechnet man

$$\tilde{D} = R^t \dot{L} (R^t)^{-1} = R^t \frac{d}{dt} \left((R^t)^{-1} \tilde{L} R^t \right) (R^t)^{-1} = \frac{d}{dt} \tilde{L} + \tilde{L} \dot{R}^t (R^t)^{-1} - \dot{R}^t (R^t)^{-1} \tilde{L}. \quad (2.72)$$

Mit $\dot{R}^t (R^t)^{-1} = (R^{-1} \dot{R})^t = \tilde{\omega}^t$ erhalten wir dann die **Eulersche Gleichung**:

$$\frac{d}{dt} \tilde{L} - [\tilde{\omega}^t, \tilde{L}] = \tilde{D}. \quad (2.73)$$

In Komponenten. Seien J_ν die Hauptachsen und $I_\nu = I^K(J_\nu, J_\nu)$ die Hauptträgheitsmomente des starren Körpers bezüglich seines Schwerpunkts. Wir entwickeln nach der **Hauptachsenbasis**:

$$\tilde{\omega} = \sum_\nu \tilde{\omega}_\nu J_\nu, \quad \tilde{L} = - \sum_\nu \tilde{L}_\nu J_\nu^t, \quad \tilde{L}(\tilde{\omega}) = \sum_\nu \tilde{L}_\nu \tilde{\omega}_\nu, \quad \tilde{D} = - \sum_\nu \tilde{D}_\nu J_\nu^t. \quad (2.74)$$

Führen wir weiter die **Strukturkonstanten** $f_{\mu, \nu\lambda}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ ein:

$$[J_\nu, J_\lambda] = \sum_\mu J_\mu f_{\mu, \nu\lambda}, \quad (2.75)$$

so können wir die Eulersche Gleichung folgendermaßen **in Komponenten** ausdrücken:

$$\frac{d}{dt} \tilde{L}_\mu + \sum_{\nu\lambda} f_{\mu, \nu\lambda} \tilde{\omega}_\nu \tilde{L}_\lambda = \tilde{D}_\mu. \quad (2.76)$$

Aus $\tilde{L} = I^K(\tilde{\omega}, \cdot)$ resultiert die Proportionalität $\tilde{L}_\nu(t) = I_\nu \tilde{\omega}_\nu(t)$. Somit sind (2.76) drei nicht-lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit für die drei Komponenten $\tilde{\omega}_\nu$ der körperbezogenen Winkelgeschwindigkeit. Wir bringen sie in die folgende **Endform**:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\omega}_\mu(t) + \sum_{\nu\lambda} f_{\mu, \nu\lambda} \tilde{\omega}_\nu(t) \tilde{\omega}_\lambda(t) \frac{I_\lambda - I_\nu}{2I_\mu} = \tilde{D}_\mu(t)/I_\mu. \quad (2.77)$$

Hält man die Lösung $t \mapsto \tilde{\omega}_\nu(t)$ der Eulerschen Gleichungen in Händen, so bestimmt man die Kurve $t \mapsto R(t)$ durch Lösen der Gleichung $R(t)^{-1} \dot{R}(t) = \sum \tilde{\omega}_\nu(t) J_\nu$.

Strukturkonstanten. Als Vorbereitung für die folgenden Betrachtungen geben wir eine explizite Beschreibung der Strukturkonstanten der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$. Dazu erinnern wir zunächst an die Generatoren J_{21} , J_{31} und J_{32} von (2.25). Um uns vom Zwang der Indexordnung zu befreien, vereinbaren wir $J_{ij} \equiv -J_{ji}$. Außerdem vereinfachen wir die Indexnotation mit der **Konvention**

$$J_{21} = J_3, \quad J_{32} = J_1, \quad J_{13} = J_2. \quad (2.78)$$

Es sei betont, dass hiermit keine Wahl einer Orientierung von $V \simeq \mathbb{R}^3$ getroffen wird. Tatsächlich mag die zugrunde liegende Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ rechtshändig oder linkshändig sein. Aus der Definition $J_{ij} = e_i \otimes \mathcal{I}(e_j) - e_j \otimes \mathcal{I}(e_i)$ folgt jetzt

$$[J_1, J_2] = [J_{32}, J_{13}] = -[J_{13}, J_{32}] = -J_{12} = J_{21} = J_3. \quad (2.79)$$

Analog erhält man $[J_2, J_3] = J_1$ und $[J_3, J_1] = J_2$. Insgesamt haben wir somit

$$f_{3, 12} = f_{1, 23} = f_{2, 31} = +1, \quad f_{3, 21} = f_{1, 32} = f_{2, 13} = -1. \quad (2.80)$$

Alle anderen Strukturkonstanten (mit doppelt oder dreifach vorkommenden Indizes) sind Null.

2.5.1 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Hier und in den folgenden Unterabschnitten betrachten wir den **kräftefreien Fall**: $F^{(\text{ext})} = 0$ und $D = 0$. Als erstes behandeln wir das relativ einfache Problem des symmetrischen Kreisels.

Wir übernehmen die für die Generatoren soeben getroffene Indexkonvention $J_{21} \equiv J_3$ und schreiben für die Hauptträgheitsmomente entsprechend

$$I_{12} = I_{21} = I_3, \quad I_{23} = I_{32} = I_1, \quad I_{31} = I_{13} = I_2. \quad (2.81)$$

Für den symmetrischen Kreisel mit $I_1 = I_2 \neq I_3$ (und $I_1 \neq 0 \neq I_3$) vereinfacht sich die dritte Eulersche Gleichung zu $\frac{d}{dt} \tilde{\omega}_3 = 0$ an, woraus die Konstanz von $\tilde{\omega}_3$ folgt. Wir setzen

$$\Omega := \tilde{\omega}_3 \frac{I_3 - I_2}{I_1} = \tilde{\omega}_3 \frac{I_3 - I_1}{I_2} = \text{const.} \quad (2.82)$$

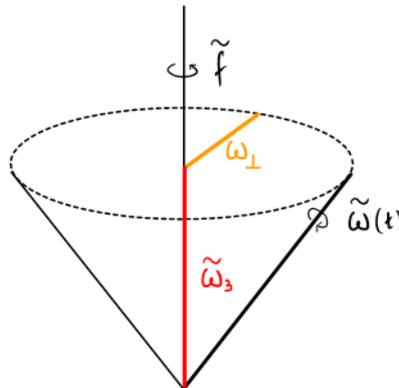
Dann lauten die verbleibenden zwei Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\omega}_1(t) = -\Omega \tilde{\omega}_2(t), \quad \frac{d}{dt} \tilde{\omega}_2(t) = +\Omega \tilde{\omega}_1(t). \quad (2.83)$$

Präzessionsbewegung. Die Gleichungen (2.83) haben die allgemeine Lösung

$$\tilde{\omega}_1(t) = \omega_{\perp} \cos(\Omega t + \phi), \quad \tilde{\omega}_2(t) = \omega_{\perp} \sin(\Omega t + \phi), \quad (2.84)$$

wobei ω_{\perp} und ϕ Integrationskonstanten sind. Offenbar gilt: $|\tilde{\omega}(t)|^2 = (\tilde{\omega}_3)^2 + (\omega_{\perp})^2 = \text{const}$, und $\tilde{\omega}$ führt eine sogenannte **reguläre Präzession** mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die **Figurenachse** $\tilde{f} = J_3$ aus.



Anwendung (Euler). In der Näherung, dass die Erde als kräftefreier symmetrischer Kreisel angesehen werden kann, präzediert der **kinematische** Nordpol (in Richtung der raumbezogenen Winkelgeschwindigkeit ω) um den **geographischen** Nordpol (in Richtung der körperfesten Figurenachse $\tilde{f} = e_3$) mit der Periode $T_{pr} = 2\pi/\Omega = (2\pi/\tilde{\omega}_3) \cdot I_1/(I_3 - I_1) \simeq 300$ Tage, aufgrund von $(I_3 - I_1)/I_1 \simeq 1/300$ (Abplattung der Erde). Etwas Ähnliches wird auch beobachtet. Die Amplitude der Präzession ist sehr klein: kinematischer und geographischer Nordpol sind nie weiter als 4.5 Meter voneinander entfernt. Die Bahn ist aber sehr unregelmäßig, und die mittlere Periode ist ungefähr 430 Tage. Diese Abweichungen von der Eulerschen Vorhersage werden verschiedenen Störungen zugeschrieben (atmosphärische Bewegungen; Erde nicht starr).

Übertragung ins raumfeste System. Wie sieht nun die Bewegung aus raumfester Sicht aus? Um diese Frage zu beantworten, bringen wir die Vereinfachungen ein, die sich aus $I_1 = I_2$ für den

kräftefreien symmetrischen Kreisel ergeben. Die explizite Konstruktion der Drehoperation $R(t)$ als Lösung der Gleichung $R^{-1}\dot{R} = \tilde{\omega} = \sum_{\nu} \tilde{\omega}_{\nu} J_{\nu}$ lässt sich dann vermeiden.

Wir bemerken, dass wegen $\tilde{L}_1 = I_1 \tilde{\omega}_1$, $\tilde{L}_2 = I_2 \tilde{\omega}_2 = I_1 \tilde{\omega}_2$ und $\tilde{L}_3 = I_3 \tilde{\omega}_3 = I_1 \tilde{\omega}_3 + (I_3 - I_1) \tilde{\omega}_3$ die drei schiefen linearen Abbildungen $J_3, \tilde{\omega}, \tilde{L}^t \in \mathfrak{so}(3)$ linear abhängig sind:

$$I_1 \tilde{\omega} + (I_3 - I_1) \tilde{\omega}_3 J_3 = \sum_{\nu} \tilde{L}_{\nu} J_{\nu} = -\tilde{L}^t. \quad (2.85)$$

Daher sind sie **koplanar**, d.h. sie liegen alle in einer Ebene.

Nun gehen wir zum raumfesten System über:

$$\omega = R \tilde{\omega} R^{-1}, \quad f := R \tilde{f} R^{-1}, \quad L^t = R \tilde{L}^t R^{-1}. \quad (2.86)$$

Da die Operation $X \mapsto R X R^{-1}$ eine lineare Abbildung ist, überträgt sich die Eigenschaft der Koplanarität von $\tilde{f}, \tilde{\omega}, \tilde{L}^t$ auf f, ω, L^t . Die Größen $\omega(t)$ und $f(t)$ sind zeitabhängig, hingegen ist der Drehimpuls $L \in \mathfrak{so}(3)^*$ (und somit auch $L^t \in \mathfrak{so}(3)$) zeitunabhängig.

Aufgabe. Das zum Euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ auf $V \simeq \mathbb{R}^3$ passende Skalarprodukt auf der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ ist $\langle A, B \rangle_{\mathfrak{so}(3)} = \frac{1}{2} \text{Tr}(A^T B)$; vgl. Gln. (2.61) und (2.46). Ist $J \in \mathfrak{so}(3)$ ein Generator ($J^2 = -\Pi_E$) und $A \in \mathfrak{so}(3)$ eine beliebige schiefe lineare Abbildung, so liefert

$$A = A_{\perp} + A_{\parallel}, \quad A_{\perp} = -[J, [J, A]], \quad A_{\parallel} = A + [J, [J, A]], \quad (2.87)$$

die Orthogonalzerlegung von A in zwei Komponenten, die zur J -Achse senkrecht bzw. parallel stehen (A_{\perp} bzw. A_{\parallel}). Der senkrechte Anteil hat die Länge (oder Norm) $|A_{\perp}| = |[J, A]|$. (Hinweis: für $B = [J, A]$ ist die Abbildung $B \mapsto [J, B]$ eine **Isometrie**, d.h. es gilt $|[J, B]| = |B|$.)

Satz. Die Figurenachse $f(t) = R(t) \tilde{f} R(t)^{-1}$ und die momentane Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ des kräftefreien symmetrischen Kreisels liegen zu allen Zeiten koplanar zum (kanonisch adjungierten) Drehimpuls $L^t \in \mathfrak{so}(3)^*$, um den sie eine reguläre Präzession mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω_r ausführen. Ω_r ist der Koeffizient $b > 0$ in der Zerlegung $\omega = a f - b L^t / |L|$.

Beweis. Die Länge von ω ist erhalten: $|\omega(t)| = |R(t) \tilde{\omega}(t) R(t)^{-1}| = |\tilde{\omega}(t)| = \text{const}$. Ebenso sind die Winkel zwischen f, ω und L^t erhalten, denn die Paarungen

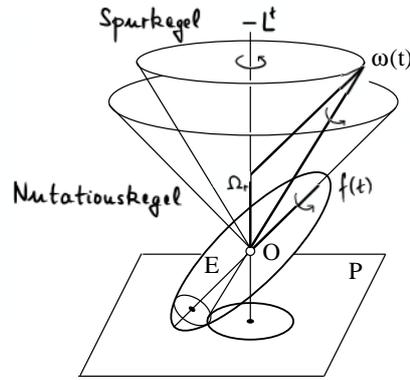
$$\frac{1}{2} \text{Tr}(L^t \omega) = L(\omega) = 2T = \text{const} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(L^t f) = L(f) = I_3 \tilde{\omega}_3 = \text{const} \quad (2.88)$$

sind zeitunabhängig. Folglich überstreichen ω und f **Kegel** um L^t . Dabei bewegen sie sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit, Ω_r , da Koplanarität zu allen Zeiten vorliegt. Zur Berechnung von Ω_r benützt man $\dot{f} = \dot{R} \tilde{f} R^{-1} - R \tilde{f} R^{-1} \dot{R} R^{-1}$, also

$$\dot{f} = [\omega, f]. \quad (2.89)$$

Nun sei $J_L := -L^t / |L|$ die invariable Drehimpulsachse und $f_{\perp} := -[J_L, [J_L, f]]$ die zu J_L senkrechte Komponente von f . Da Ω_r per Definition die Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung von f_{\perp} ist, haben wir

$$\Omega_r(t) = \frac{|\dot{f}(t)|}{|f_{\perp}(t)|} = \frac{|[\omega(t), f(t)]|}{|[J_L, f(t)]|}. \quad (2.90)$$



Aus der Zerlegung $\omega = af + bJ_L$ folgt dann sofort $\Omega_r = b$. Mit $|\omega(t), f(t)| = |\tilde{\omega}(t), \tilde{f}| = \omega_\perp = \text{const}$ und $|f_\perp(t)| = |[J_L, f(t)]| = \text{const}$ folgt außerdem $\Omega_r(t) = \text{const}$. \square

Die Aussage des Satzes ist in der obigen Figur dargestellt. Dort erkennt man neben dem Spurkegel (ω) und dem sog. Nutationskegel (f) auch noch das auf der invariablen Ebene P rollende Energieellipsoid E von Abschnitt 2.4. Beachte, dass der Kosinus des Winkels zwischen $-L^t$ und ω wegen $\frac{1}{2}\text{Tr}(L^t\omega) = L(\omega) = 2T > 0$ immer positiv ist.

Bemerkung. Im allgemeinen gilt $\Omega_r \neq \Omega$.

2.6 Unsymmetrischer Kreisel

Wir gehen ähnlich wie bei der Poinsoischen Konstruktion vor, nur arbeiten wir jetzt im körperfesten System. Die Eulerschen Gleichungen (2.77) haben für $\tilde{D} = 0$ zwei Konstanten der Bewegung, die beide quadratisch von $\tilde{\omega}$ (oder \tilde{L}) abhängen: zum einen die (doppelte) kinetische Energie,

$$2T = \frac{\tilde{L}_1^2}{I_1} + \frac{\tilde{L}_2^2}{I_2} + \frac{\tilde{L}_3^2}{I_3}, \quad (2.91)$$

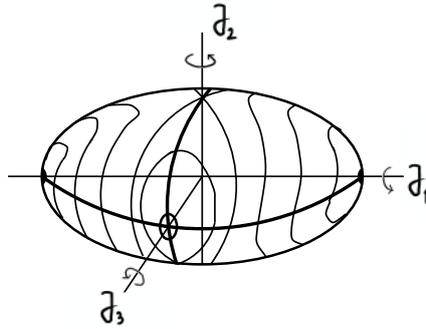
und zum anderen das Längenquadrat des Drehimpulses,

$$|L|^2 = \tilde{L}_1^2 + \tilde{L}_2^2 + \tilde{L}_3^2. \quad (2.92)$$

Offenbar liegt \tilde{L} im Durchschnitt eines Ellipsoids und einer Sphäre.

Bahnkurven von \tilde{L} . Um die Struktur der Durchschnitte zu untersuchen, fixieren wir den Wert von T (und somit das Ellipsoid) und variieren den Radius $|L|$ der Sphäre. Die Halbachsen des Ellipsoids sind $\sqrt{2TI_1} > \sqrt{2TI_2} > \sqrt{2TI_3}$, wenn wir o.B.d.A. die Anordnung $I_1 > I_2 > I_3 > 0$ annehmen. Ist der Radius $|L|$ der Sphäre kleiner (oder größer) als die kleinste (bzw. größte) Halbachse, so ist der Durchschnitt leer und es existiert keine reale Bewegung zu diesen Werten von T und $|L|$. Wenn der Radius der Sphäre gleich der kleinsten Halbachse ist, dann besteht der Durchschnitt aus zwei Punkten. Vergrößern wir den Radius, so dass $\sqrt{2TI_3} < |L| < \sqrt{2TI_2}$, dann entstehen zwei geschlossene Kurven um die Enden der kleinsten Halbachsen. In der gleichen Weise bekommen wir für $|L| = \sqrt{2TI_1}$ zwei Punkte als Durchschnitt, und für $\sqrt{2TI_2} < |L| < \sqrt{2TI_1}$ zwei geschlossene Kurven in der Nähe der Enden der großen Halbachsen.

Aufgabe. Für $|L| = \sqrt{2TI_2}$ besteht der Durchschnitt aus zwei Kreisen.



Dynamik. Jedem der sechs Enden der Halbachsen des Ellipsoids entspricht eine stationäre Lösung $\tilde{L} = \text{const}$ von (2.77). Für eine solche Lösung ist $\tilde{\omega}$ zu \tilde{L} (und somit ω zu L) parallel: der Körper rotiert dann mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine seiner Hauptachsen J_k ($k = 1, 2, 3$), die in diesem Fall raumfest ist. Eine solche Bewegung nennen wir **stationäre Drehung**. Aus der Bedeutung der diskutierten Durchschnitte als Bahnkurven der Bewegung von \tilde{L} folgt nun sofort ein qualitativer Unterschied zwischen den beiden Fällen $k = 1, 3$ und dem Fall $k = 2$ (siehe die obige Graphik). Die stationären Drehungen um die größte und kleinste Halbachse ($k = 1, 3$) des Energieellipsoids sind **stabil** in dem Sinn, dass eine kleine Störung der Anfangsbedingung klein bleibt für alle Zeiten klein. Hingegen ist die stationäre Drehung um die mittlere Halbachse ($k = 2$) **instabil**; eine kleine Störung bleibt nicht klein, sondern wächst an (bis zu einer Maximalamplitude).

Aufgabe. Verifiziere diese Aussagen über (In-)Stabilität durch eine analytische Diskussion der Eulerschen Gleichungen für Anfangsbedingungen in der Nähe der 6 Enden der Halbachsen.