3 Kleine Schwingungen

(Arnold, Seiten 98ff.) In diesem Abschnitt behandeln wir lineare Hamiltonsche Systeme. Solche Systeme lassen sich in geschlossener Form lösen (sie sind, wie man sagt, *integrabel*.) In vielen nichtlinearen Problemen liefert eine lineare Näherung qualitativ richtige oder zufriedenstellende Ergebnisse. Selbst wenn das nicht so ist, kann die Untersuchung des linear genäherten Systems ein nützlicher Schritt auf dem Weg zum Verständnis des nichtlinearen Problems sein.

3.1 Gleichgewichtslagen

Für ein autonomes dynamisches System

$$\dot{x} = X(x) \tag{3.1}$$

heißt ein Punkt x_0 des Definitionsbereichs von X *singulär*, wenn gilt $X(x_0) = 0$. Da für singuläres x_0 die konstante Abbildung $t \mapsto x(t) = x_0$ die Bewegungsgleichung (3.1) löst, nennen wir x_0 auch eine *Gleichgewichtslage* des dynamischen Systems.

Im Folgenden geht es um autonome Hamiltonsche Systeme mit Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H = T + U : \quad & M \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \to \mathbb{R}\,, \\ T = \frac{1}{2} \sum_{k,\,l=1}^{f} \mu_{kl}(q)\, p_k\, p_l\,, \quad & U = U(q), \end{aligned} \tag{3.2}$$

für f Freiheitsgrade (oder verallgemeinerte Ortsvariablen) $q = (q_1, \ldots, q_f)$ mit kanonischen Impulsvariablen $p = (p_1, \ldots, p_f)$. Die Koeffizienten μ_{kl} von T sind die Matrixelemente der *inversen Massenmatrix*. Die kinetische Energie ist positiv: $T \geq 0$ und $T = 0 \Leftrightarrow p = 0$. (Eine kinetische Energie von nichtdiagonaler Gestalt ist uns schon in der Theorie starrer Körper begegnet.)

Die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f$ des Hamiltonschen Systems berechnen sich als Ableitungen der Hamiltonfunktion nach den kanonischen Impulsvariablen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_{l=1}^{f} \mu_{kl}(q)\, p_l \quad (k = 1, \ldots, f). \tag{3.3}$$

(Die Begründung hierzu wird in der analytischen Mechanik nachgeliefert.) Die Impulskomponenten $p_1, \ldots, p_f$ haben Zeitableitungen, die durch die verallgemeinerten Kräfte, nämlich die partiellen Ableitungen der Hamiltonfunktion nach den verallgemeinerten Orten, bestimmt werden:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \ldots, f). \tag{3.4}$$

Die Gleichungen (3.3) und (3.4) bilden ein dynamisches System der allgemeinen Form (3.1).

Fakt. Ein Punkt $(q^{(0)}, p^{(0)}) \in M$ ist eine Gleichgewichtslage des durch (3.2) definierten dynamischen Systems genau dann, wenn gilt: (i) $p^{(0)} = 0$ und (ii) $q^{(0)}$ ist ein kritischer Punkt von U.

Beweis. Eine Richtung ($\Leftarrow$) ist klar. Für die andere Richtung ($\Rightarrow$) bemerken wir, dass für jede Gleichgewichtslage $(q(t), p(t)) = (q^{(0)}, p^{(0)}) = \text{const}$ gelten muss:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k}(q^{(0)}, p^{(0)}) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_k}(q^{(0)}, p^{(0)}) = 0 \quad (k = 1, \ldots, f). \tag{3.5}$$

Wegen der Positivität der inversen Massenmatrix verschwinden die partiellen Ableitungen nach den Impulskomponenten nur für $p^{(0)} = 0$. An dieser Stelle gilt aber

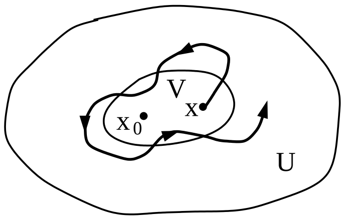
$$\frac{\partial H}{\partial q_k}(q^{(0)}, 0) = \frac{\partial U}{\partial q_k}(q^{(0)}).$$

Es folgt somit die Bedingung $(\mathrm{d}U)_{q^{(0)}} = 0$.

3.2 Stabilität von Gleichgewichtslagen

Wir untersuchen nun die Bewegung zu Anfangsbedingungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage.

Definition. Eine Gleichgewichtslage x_0 eines Vektorfeldes X heißt *Liapunov-stabil*, falls es in jeder Umgebung U von x_0 eine Umgebung V $\subseteq$ U von x_0 gibt, so dass für den Fluss ϕ_t von X gilt: $\phi_t(x) \in$ U für alle $x \in$ V und $t \geq 0$.



Ein Liapunov-stabiler Punkt x_0

Fakt. Betrachte das Hamiltonsche System (3.2). Wenn $q^{(0)}$ ein striktes lokales Minimum der potentiellen Energie ist, dann ist die Gleichgewichtslage $(q^{(0)}, 0)$ Liapunov-stabil.

Beweis. Wir setzen $h := U(q^{(0)})$. Durch geeignete Wahl von $\varepsilon > 0$ können wir diejenige Zusammenhangskomponente der Menge $\{q \mid U(q) \leq h + \varepsilon\}$, die $q^{(0)}$ enthält, beliebig klein machen. Die entsprechende Zusammenhangskomponente Z_0 des Gebiets $\{(q,p) \mid H(q,p) \leq h + \varepsilon\}$ im Phasenraum ist dann eine beliebig kleine Umgebung des Punkts $(q,p) = (q^{(0)}, 0)$. Z_0 ist aber aufgrund des Energiesatzes unter dem Phasenfluss invariant. Deshalb verbleibt jede Phasenbahn $\big(q(t), p(t)\big)$ in der Nähe von $(q^{(0)}, 0)$, wenn die Anfangsbedingung $\big(q(0), p(0)\big)$ nahe genug bei $(q^{(0)}, 0)$ liegt.

3.3 Linearisierung

Wir kehren zum allgemeinen System (3.1) zurück. Bei der Untersuchung der Lösungen von (3.1) in der Nähe einer Gleichgewichtslage benutzt man oft eine lineare Approximation, wie folgt. Taylor-Entwicklung des Vektorfeldes X um die Gleichgewichtslage x_0 liefert:

$$X(x) = (D_{x_0}X)(x - x_0) + \mathcal{O}\left((x - x_0)^2\right), \tag{3.6}$$

und mit $K := D_{x_0}X$ erhalten wir für $y := x - x_0$ das linearisierte dynamische System

$$\dot{y} = Ky. \tag{3.7}$$

Das linearisierte System hat den Vorteil, dass sein Fluss sofort angegeben werden kann:

$$\phi_t = \exp tK = \mathrm{Id} + tK + \frac{t^2}{2!}K^2 + \frac{t^3}{3!}K^3 \cdots . \tag{3.8}$$

Wie “gut” ist nun diese lineare Approximation? Falls die Gleichgewichtslage x_0 Liapunov-stabil ist, verweilt die Bewegung für alle Zeiten in der Nähe von x_0 (sofern die Anfangsbedingung nahe genug bei x_0 liegt), und die lineare Approximation gibt eine qualitativ richtige Beschreibung. In Abwesenheit von Liapunov-Stabilität wird nur die Kurzzeitdynamik richtig wiedergegeben.

Phasenfluss. Wir wenden uns jetzt wieder dem Hamiltonschen System mit Hamiltonfunktion (3.2) zu und linearisieren die Bewegungsgleichungen um eine Gleichgewichtslage, die wir o.B.d.A. am Punkt $q^{(0)} = 0$ annehmen. Dazu genügt es, die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\sum_{k,l} \mu_{kl}(q)\, p_k\, p_l$ durch ihren Ausdruck für $q = q^{(0)} = 0$ zu ersetzen,

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{k,l} \mu_{kl}(0)\, p_k\, p_l\,, \tag{3.9}$$

und die potentielle Energie quadratisch zu nähern,

$$U_2 = \frac{1}{2}\sum_{k,l} B_{kl}\, q_k\, q_l\,, \quad B_{kl} = (\text{Hess}\, U)_{kl}(0) = \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_l}(0). \tag{3.10}$$

Die Matrix K des linearisierten Systems hat in diesem Fall die Gestalt

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^{-1} \\ -\mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}^{-1} = (\mu_{kl}(0)) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = (B_{kl}), \tag{3.11}$$

und der Phasenfluss ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \phi_t = \exp(tK) &= \cosh(tK) + \sinh(tK) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}}) & \mathcal{A}^{-1}\dfrac{\sin(t\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}})}{\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}}} \\ -\mathcal{B}\dfrac{\sin(t\sqrt{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}})}{\sqrt{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}}} & \cos(t\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $\cos\sqrt{X} = \sum_{n=0}^{\infty}(-X)^n/(2n)!$ und $\sqrt{X}^{\,-1}\sin\sqrt{X} = \sum_{n=0}^{\infty}(-X)^n/(2n+1)!$ durch ihre Potenzreihen erklärt sind. Ein anderes Verfahren zur Konstruktion des gleichen Phasenflusses ist Thema des nächsten Abschnitts.

3.4 Normalschwingungen

Wir betrachten jetzt das Problem *kleiner Schwingungen,* d.h. von Bewegungen des linearisierten Hamiltonschen Systems (3.2) mit Energiefunktion

$$H = T + U, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{f} A_{kl}\, \dot{q}_k\, \dot{q}_l\,, \quad U = \frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{f} B_{kl}\, q_k\, q_l\,. \tag{3.12}$$

Hierfür ist es zweckmäßig, die kinetische Energie T als quadratische Form in den Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$ (statt den Impulsen p_k) auszudrücken. Die Umrechnung erfolgt mit $p_k = \sum_l A_{kl}\, \dot{q}_l$, wobei $A_{kl} = (\mu^{-1})_{kl}(0)$ die Matrixelemente der *Massenmatrix* in der Gleichgewichtslage $q^{(0)} \equiv 0$ sind.

Zwei symmetrische Bilinearformen. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{p}_k = \sum_l A_{kl}\, \ddot{q}_l = -\sum_l B_{kl}\, q_l = F_k \quad (k = 1, \ldots, f). \tag{3.13}$$

Um sie vollständig zu lösen, ist es günstig zu abstrahieren. Sei $\{e_1, \ldots, e_f\}$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^f$. (Beachte, dass auf $\mathbb{R}^f$ keine Euklidische Struktur vorausgesetzt wird!) Wir definieren zwei symmetrische Bilinearformen $A, B: \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \to \mathbb{R}$ durch die Forderungen

$$A(e_k, e_l) = A(e_l, e_k) = A_{kl} \quad \text{und} \quad B(e_k, e_l) = B(e_l, e_k) = B_{kl} \quad (k, l = 1, \ldots, f)\,. \tag{3.14}$$

Wir setzen $q := \sum_{k=1}^{f} q_k e_k$ und können hiermit T und U koordinatenfrei aufschreiben:

$$T = \tfrac{1}{2} A(\dot{q}, \dot{q}) \quad \text{und} \quad U = \tfrac{1}{2} B(q, q). \tag{3.15}$$

Da die kinetische Energie positiv definit ist, wird durch

$$\langle x, y \rangle_A := A(x, y) \tag{3.16}$$

ein (Euklidisches) Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^f$ erklärt.

Fakt. Es existiert eine bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ orthonormale Basis $\{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_f\}$, welche die quadratische Form B auf Diagonalgestalt bringt: $B(\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l) = \lambda_k \delta_{kl}$. (Die Zahlen λ_k heißen die *Eigenwerte von B relativ zu A.*)

Beweisidee. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt konstruiert man eine A-Orthonormalbasis $\{\widehat{e}_1, \ldots, \widehat{e}_f\}$ von $\mathbb{R}^f$. Das Vorgehen hierbei ist iterativ. Man beginnt mit irgendeinem Einheitsvektor $\widehat{e}_1 \in \mathbb{R}^f$, $\langle \widehat{e}_1, \widehat{e}_1 \rangle_A = 1$. Die Wahl von $\widehat{e}_1$ bestimmt eine Orthogonalzerlegung $\mathbb{R}^f = \mathbb{R}\widehat{e}_1 \oplus V_1$. Im orthogonalen Komplement V_1 von $\widehat{e}_1$ wählt man dann einen zweiten Einheitsvektor $\widehat{e}_2$, der wiederum eine Orthogonalzerlegung $V_1 = \mathbb{R}\widehat{e}_2 \oplus V_2$ bestimmt. In V_2 wählt man dann $\widehat{e}_3$, usw. Auf diese Weise entsteht ein *Fahne* von Vektorräumen $\mathbb{R}^f \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_{f-1} \supset V_f \equiv \mathbf{0}$ und gleichzeitig eine Basis $\{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \ldots, \widehat{e}_f\}$, die orthonormal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ ist.

Im zweiten Schritt des Beweises betrachtet man die Matrix $\widehat{B}_{kl} = B(\widehat{e}_k, \widehat{e}_l)$ der symmetrischen Bilinearform B in der gewählten A-Orthonormalbasis. Ein Ergebnis der linearen Algebra besagt, dass diese symmetrische Matrix durch eine A-orthogonale Transformation auf Diagonalgestalt gebracht werden kann; d.h. es existiert ein Basiswechsel $\widetilde{e}_k = \sum_l R_{kl}\, \widehat{e}_l$ mit den Eigenschaften

$$A(\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l) = \sum_{k', l'} R_{kk'} R_{ll'} \delta_{k'l'} = \delta_{kl},$$
$$B(\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l) = \sum_{k', l'} R_{kk'} R_{ll'} B(\widehat{e}_{k'}, \widehat{e}_{l'}) = \lambda_k \delta_{kl}\,.$$

Folgerung 1. Werden die Matrizen von A und B in der Ausgangsbasis $\{e_1, \ldots, e_f\}$ mit $\mathcal{A} = (A_{kl})$ und $\mathcal{B} = (B_{kl})$ bezeichnet, so sind die Zahlen λ_k die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda) = \mathrm{Det}(\mathcal{B} - \lambda\mathcal{A})$.

Beweis. In der Basis $\{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_f\}$ gilt: $(B - \lambda A)(\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l) = (\lambda_k - \lambda)\delta_{kl}$. Die Determinante der Matrix von $B - \lambda A$ in dieser Basis ist somit $\prod_{k=1}^{f} (\lambda_k - \lambda)$, mit den Nullstellen $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, \ldots, f)$. Das Verschwinden der Determinante ist eine Eigenschaft, die nicht von der Wahl der Basis abhängt.

Bemerkung. Die Determinante einer linearen Abbildung $L: V \to V$ ist bekanntlich basisunabhängig erklärt; siehe Gleichung (2.1) vom Anfang des zweiten Kapitels. Nun wird aber durch eine symmetrische Bilinearform Q auf V kein Endomorphismus von V definiert, sondern eine lineare Abbildung $Q: V \to V^*$, $v \mapsto Q(v, \cdot)$. Um die Determinante einer solchen linearen Abbildung zu definieren, benötigt man zwei Volumenformen, eine auf V und eine zweite auf V^*:

$$\Omega_{V^*}(Qe_1, \ldots, Qe_f) = \Omega_V(e_1, \ldots, e_f)\,\mathrm{Det}(Q). \tag{3.17}$$

In Abwesenheit von zusätzlicher Information (z.B. durch ein fundamentales Skalarprodukt) existiert keine kanonische Wahl für (die Normierung von) Ω_V und Ω_{V^*}. Deshalb ist $\mathrm{Det}(Q)$ nur bis auf die Multiplikation mit einer beliebigen (positiven) Konstante erklärt.

Folgerung 2. Die Basisvektoren $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_f$ genügen den Gleichungen

$$(B - \lambda_k A)(\widetilde{e}_k, \cdot) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, f). \tag{3.18}$$

Diese Aussage folgt aus dem Verschwinden von $(B - \lambda_k A)(\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l) = 0$ für alle $k, l = 1, \ldots, f$ und der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_f$. □

Wir bezeichnen die Koordinaten von $q = \sum_{k=1}^{f} q_k e_k$ bezüglich $\{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_f\}$ mit Q, also $q = \sum_{k=1}^{f} Q_k \widetilde{e}_k$. In diesen Koordinaten haben T und U die Diagonalgestalt

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f} \dot{Q}_k^2, \quad U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f} \lambda_k Q_k^2. \tag{3.19}$$

Das System von Bewegungsgleichungen zerfällt daher in f entkoppelte Gleichungen:

$$\ddot{Q}_k = -\lambda_k Q_k \quad (k = 1, \ldots, f). \tag{3.20}$$

Für jedes der eindimensionalen Systeme (3.20) sind drei mögliche Fälle zu unterscheiden:

(i) $\lambda = \omega^2 > 0$; die Lösung ist $Q = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$.

(ii) $\lambda = 0$; die Lösung ist $Q = c_1 + c_2 t$ ("neutrales Gleichgewicht").

(iii) $\lambda = -\nu^2 < 0$; die Lösung ist $Q = c_1 \cosh \nu t + c_2 \sinh \nu t$ ("Instabilität").

Zu jedem positiven Eigenwert $\lambda_k = \omega_k^2$ gibt es also eine Lösung $q(t) = (c_1 \cos \omega_k t + c_2 \sin \omega_k t)\,\widetilde{e}_k$, oder in den ursprünglichen Koordinaten,

$$q_l(t) = (c_1 \cos \omega_k t + c_2 \sin \omega_k t)\,\xi_l^{(k)} \quad (l = 1, \ldots, f), \tag{3.21}$$

wobei $\xi_l^{(k)}$ die Komponenten von $\widetilde{e}_k$ bezüglich der Ausgangsbasis $\{e_1, \ldots, e_f\}$ sind.

Definition. Die periodische Bewegung (3.21) heißt eine *Normalschwingung* des Systems mit Hamiltonfunktion (3.12), und die Zahl ω_k heißt *charakteristische Frequenz.* □

Wir benützen dieselbe Terminologie für nichtpositive Eigenwerte, obwohl die Bewegung dann nicht periodisch ist. Mit dieser Konvention können wir kurz zusammenfassen:

(i) Das Hamiltonsche System mit Hamiltonfunktion (3.12) hat f Normalschwingungen, deren Richtungen paarweise orthogonal bezüglich des durch die kinetische Energie bestimmten Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ sind.

(ii) Jede kleine Schwingung ist eine Summe von f Normalschwingungen.

Anleitung. Gegeben sei das linearisierte System mit Hamiltonfunktion (3.12). In der Praxis geht man am besten folgendermaßen vor.

(A) Berechne das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \mathrm{Det}\big((B_{kl} - \lambda A_{kl})\big)$ und bestimme seine Nullstellen, $\lambda = \lambda_n$ $(n = 1, \dots, f)$.

(B) Für jede Nullstelle λ_n löse das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{l=1}^{f} (B_{kl} - \lambda_n A_{kl})\, \xi_l^{(n)} = 0 \qquad (k = 1, \dots, f). \tag{3.22}$$

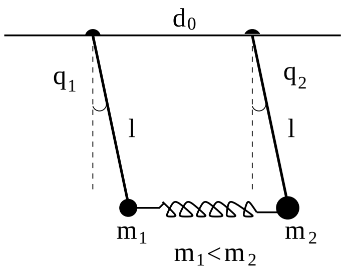
(C) Normiere (falls gewünscht) das System von Eigenvektoren $\xi_l^{(n)}$ durch

$$\sum_{k,\,l=1}^{f} A_{kl}\, \xi_k^{(m)} \xi_l^{(n)} = \delta_{mn}\,. \tag{3.23}$$

Dann sind $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ die charakteristischen Frequenzen, und die Vektoren $\widetilde{e}_n = \sum_{l=1}^{f} \xi_l^{(n)} e_l$ definieren die Richtungen der Normalschwingungen.

3.5 Beispiel: Gekoppelte Pendel

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir zwei gekoppelte, ebene Pendel mit gleicher Länge l und verschiedenen Massen m_1 und m_2. Die Pendel befinden sich im Schwerefeld mit Erdbeschleunigung g und hängen in der Gleichgewichtslage senkrecht nach unten. Die Kopplung erfolgt über eine Feder mit Federkonstante α. Als verallgemeinerte Ortsvariablen verwenden wir die Winkel q_1 und q_2 der Auslenkung aus der Vertikalen.



Die Energiefunktion ist:

$$H = \frac{l^2}{2}\big(m_1\,\dot{q}_1^2 + m_2\,\dot{q}_2^2\big) + gl\big(m_1(1-\cos q_1) + m_2(1-\cos q_2)\big) + \frac{\alpha}{2}\big(d(q_1,q_2) - d_0\big)^2 \tag{3.24}$$

mit $d(q_1,q_2) = \big((l\cos q_1 - l\cos q_2)^2 + (d_0 - l\sin q_1 + l\sin q_2)^2\big)^{1/2}$ dem Abstand zwischen den zwei Pendelmassen. Linearisierung um die Gleichgewichtslage $q_1 = q_2 = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ gibt

$$H = \frac{l^2}{2}\big(m_1\,\dot{q}_1^2 + m_2\,\dot{q}_2^2\big) + \frac{gl}{2}\big(m_1\,q_1^2 + m_2\,q_2^2\big) + \frac{\alpha l^2}{2}(q_1 - q_2)^2. \tag{3.25}$$

Hiervon lesen wir die Matrizen der kinetischen und potentiellen Energie ab:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} m_1 g l + \alpha l^2 & -\alpha l^2 \\ -\alpha l^2 & m_2 g l + \alpha l^2 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Nach kurzer Rechnung finden wir

$$\mathrm{Det}(\mathcal{B} - \lambda \mathcal{A}) = (m_1 + m_2)\, l^2 \Big(m(g - \lambda l)^2 + \alpha l (g - \lambda l) \Big) \tag{3.27}$$

mit $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ der reduzierten Masse. Die Wurzeln der Nullstellen dieses Polynoms sind die charakteristischen Frequenzen:

$$\omega_1 = \sqrt{g/l}\,, \quad \omega_2 = \sqrt{g/l + \alpha/m}\,. \tag{3.28}$$

Durch das Lösen der linearen Gleichungen $(\mathcal{B} - \omega_n^2 \mathcal{A})\, \xi^{(n)} = 0$ für $n = 1, 2$ erhält man die Richtungen der Normalschwingungen:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

In der ersten Normalschwingung pendeln die beiden Massen in Phase. Die charakteristische Frequenz ist in diesem Fall gleich der Frequenz, die jedes Pendel alleine (ohne gegenseitige Kopplung durch die Feder) hätte. In der zweiten Normalschwingung schwingen die Pendel gegenphasig, wobei sich die Amplituden der Auslenkung invers zu den Massen verhalten. In diesem Fall ist die charakteristische Frequenz durch die rückstellende Kraftwirkung der Feder erhöht.