

5. Elektrostatik

5.1 Grundgesetze

Euklidischer Raum $(M, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit $M = E_3$, $V \simeq \mathbb{R}^3$.

(i) Elektrische Feldstärke ist eine 1-Form $E: M \rightarrow V^*$.

Elektrische Spannung längs Weg γ : $V(\gamma) = \int_{\gamma} E$.

Elektrostatik: $V(\gamma)$ wegunabhängig $\Leftrightarrow dE = 0$.

In Koordinaten: $E = \sum_i E_i dx_i$

$$dE = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq i < j \leq 3).$$

(ii) Elektrische Erregung (oder Flussdichte) D ist eine ungerade 2-Form.

Elektrische Ladungsdichte ρ ist eine Dichte (oder ungerade 3-Form).

Gaußsches Gesetz: $\int_{\partial U} D = \int_U \rho$ (elektrische Ladung in U = elektrischer Fluss durch ∂U).

In differentieller Form: $dD = \rho$ ("Ladungen sind die Quellen elektrischer Erregung").

In Koordinaten: $D = \sum_{i < j} D_{ij} [dx_i \wedge dx_j; Or]$, $\rho = \rho_{123} [dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3; Or]$.

$$dD = \rho \Leftrightarrow \rho_{123} = \frac{\partial}{\partial x_1} D_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} D_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3} D_{12} \quad (D_{ji} = -D_{ij}).$$

(iii) Materialgleichungen: $D = \epsilon_0 * E$, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$ (dielektrische Konstante des Vakuums).

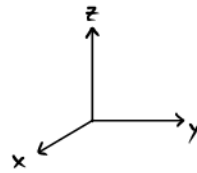
Hodge-Sternoperator in kartesischen Koordinaten:

$$*dx = [dy \wedge dz; R], \quad *dy = [dz \wedge dx; R], \quad *dz = [dx \wedge dy; R].$$

$$D = \epsilon_0 * E \Leftrightarrow D_{yz} = \epsilon_0 E_x, \quad D_{zx} = \epsilon_0 E_y, \quad D_{xy} = \epsilon_0 E_z.$$

5.2 Zusammenhang mit kapazitiven Netzwerken

K = raumfüllender Komplex; hier: kubisches Gitter



$C_3(K)$ aufgespannt durch elementare Würfel (3-Zellen) mit Händigkeit $O_r = R$ oder $O_r = L$.

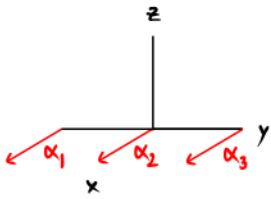
$C_2(K)$ aufgespannt durch Quadrate (Seitenflächen, 2-Zellen) mit Zirkulationssinn.

$C_1(K)$... durch Kanten (1-Zellen) mit Richtungssinn.

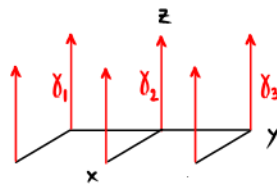
$C_0(K)$... durch Ecken (0-Zellen, Knoten). Orientierung entfällt.

Gitterkonstante (= Kantenlänge) = a .

Einige wichtige Ko-Ketten ($\rightarrow$ kartesische Basis) sind:

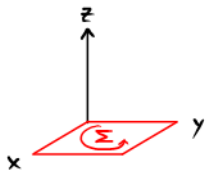


$$dx = a (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* + \dots) \in C^1(K)$$

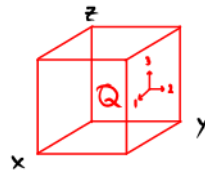


$$dz = a (\gamma_1^* + \gamma_2^* + \gamma_3^* + \dots) \in C^1(K)$$

Kanonische Paarung von Ko-Kette mit Kette: $\langle dz, \gamma_1 \rangle = \langle a \cdot \gamma_1^* + \dots, \gamma_1 \rangle = a \stackrel{(\gamma)}{=} \int_{\gamma_1} dz = \text{Integral}$



$$dx \wedge dy = a^2 \cdot \Sigma^* + \dots \in C^2(K)$$

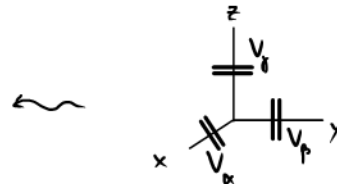


$$dx \wedge dy \wedge dz = a^3 \cdot Q^* + \dots \in C^3(K).$$

Kondensatorspannungen: $V = V_\alpha \alpha^* + V_\beta \beta^* + V_\gamma \gamma^* + \dots = \dots + \underbrace{\left(\frac{V_\gamma}{a}\right)}_{E_z} \underbrace{(a \gamma^*)}_{dz} + \dots$

Elektrische Feldstärke: $E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$

$$\begin{aligned} E_z &= V_\gamma / a \\ V_\alpha / a &= E_x \\ E_y &= V_\beta / a \end{aligned}$$



$$[V_\gamma] = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}}, \quad [E_i] = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung} \times \text{Länge}}.$$

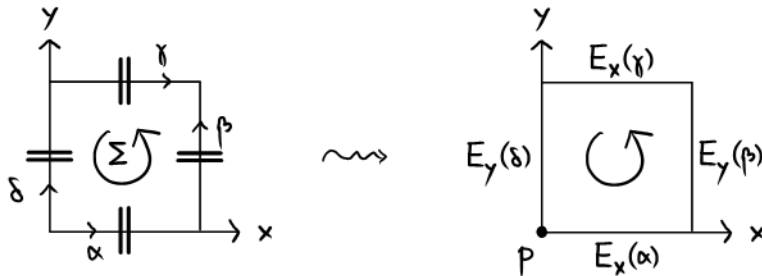
Bislang nichts passiert! (Nur umgeschrieben & umbenannt). Jetzt Übergang zum

Kontinuum. Annahme: die Koeffizienten E_i ändern sich nur wenig von Kante zu Kante.

↪ die E_i lassen sich als (differenzierbare) Funktionen auffassen.

↪ $E = \sum_i E_i dx_i$ bekommt die Bedeutung einer 1-Form.

2. Kirchhoff'sche Regel im Kontinuumslimit.



$$(dV)_\Sigma = V_\beta - V_\delta - V_\gamma + V_\alpha = a(E_y(\beta) - E_y(\delta) - E_x(\gamma) + E_x(\alpha)).$$

Kontinuumsannahme: $E_x(\alpha) = E_x(p + \frac{a}{2}e_x)$, $E_x(\gamma) = E_x(p + \frac{a}{2}e_x + ae_y)$,
 $E_y(\delta) = E_y(p + \frac{a}{2}e_y)$, $E_y(\beta) = E_y(p + ae_x + \frac{a}{2}e_y)$.

$$\begin{aligned} (dV)_\Sigma &= a(E_y(p + ae_x + \frac{a}{2}e_y) - E_y(p + \frac{a}{2}e_y)) - a(E_x(p + \frac{a}{2}e_x + ae_y) - E_x(p + \frac{a}{2}e_x)) \\ &= a^2 \frac{\partial}{\partial x} E_y(p + \frac{a}{2}e_y) - a^2 \frac{\partial}{\partial y} E_x(p + \frac{a}{2}e_x) + O(a^3) \\ &= a^2 \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)(p) + O(a^3). \end{aligned}$$

Insgesamt: $dV = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)(p) \cdot a^2 \Sigma^* + \dots = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j = dE.$

Somit entspricht die 2. Kirchhoff'sche Regel $dV = 0$ im Kontinuum der Gleichung $dE = 0$.

Ladungsverhaltung im Kontinuum.

Kondensatorladungen $Q = \sum_{\gamma} Q_\gamma \cdot \gamma \in C_1(K).$

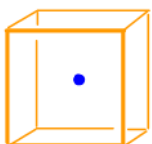
Elektrische Erregung $D = ?$ ($Q = \int D$).

Frage: Wie wird die 1-Kette Q der Kondensatorladungen zur 2-Ko-Kette D der elektrischen Flussdichte?

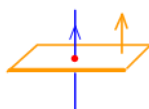
A: Dualer Komplex $\tilde{K}$; hier: $\tilde{K}$ wieder ein kubisches Gitter.

Bijektion: k -Zellen von K $\xleftrightarrow{1:1}$ $(3-k)$ -Zellen von $\tilde{K}$
 (mit innerer Orientierung) (mit äußerer Orientierung)

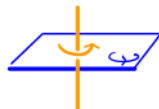
$k=0$:



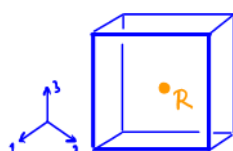
$k=1$:



$k=2$:



$k=3$:

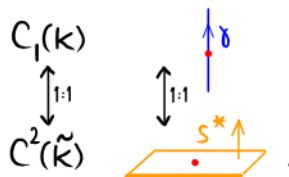


Vergleiche die kanonische Paarung $C^1(K) \otimes C_1(K) \rightarrow \mathbb{R}$

mit der Schnittpaarung $C^1(K) \otimes C^2(\tilde{K}) \rightarrow \mathbb{R}$.

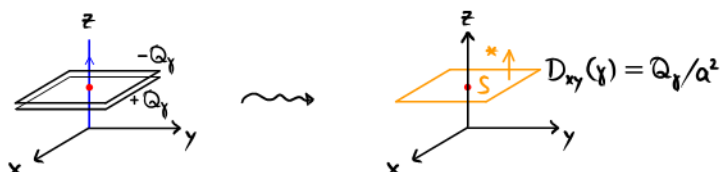
Beide Paarungen sind nichtentartet.

Deshalb haben wir einen kanonischen Isomorphismus:



Hiermit übersetzen wir die Kondensatorladungen $Q = Q_\delta \cdot \delta + \dots = \left(\frac{Q_\delta}{a^2}\right)(a^2 \delta) + \dots \in C_1(K)$

in eine elektrische Flussdichte $D = D_{xy}(\delta) \cdot a^2 S^* + \dots \in C^2(\tilde{K})$:

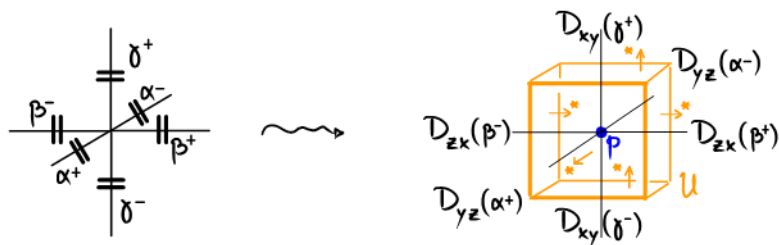


$$[Q_\delta] = \text{Ladung}, \quad [D_{ij}] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}}.$$

Bislang wieder nichts passiert; nur umgeschrieben & umgedeutet. Jetzt auf zum Kontinuum!

Annahme. Die Koeffizienten D_{ij} ändern sich nur wenig von Quadrat zu Quadrat und lassen sich somit als (differenzierbare) Funktionen auffassen.

$\leadsto D \in C^2(\tilde{K})$ bekommt die Bedeutung einer ungeraden 2-Form: $D = \sum_{i < j} D_{ij} [dx_i \wedge dx_j, 0r]$.



$$\begin{aligned} (-dQ)_p &= Q_{\alpha^+} - Q_{\alpha^-} + Q_{\beta^+} - Q_{\beta^-} + Q_{\delta^+} - Q_{\delta^-} \\ &= a^2 (D_{yz}(\alpha^+) - D_{yz}(\alpha^-) + D_{zx}(\beta^+) - D_{zx}(\beta^-) + D_{xy}(\delta^+) - D_{xy}(\delta^-)). \end{aligned}$$

Kontinuumsannahme:

$$D_{xy}(\delta^+) = D_{xy}(p + \frac{a}{2}e_z), \quad D_{yz}(\alpha^+) = D_{yz}(p + \frac{a}{2}e_x), \quad D_{zx}(\beta^+) = D_{zx}(p + \frac{a}{2}e_y),$$

$$D_{xy}(\delta^-) = D_{xy}(p - \frac{a}{2}e_z), \quad D_{yz}(\alpha^-) = D_{yz}(p - \frac{a}{2}e_x), \quad D_{zx}(\beta^-) = D_{zx}(p - \frac{a}{2}e_y).$$

$$\begin{aligned} (-dQ)_p &= a^2 (D_{yz}(p + \frac{a}{2}e_x) - D_{yz}(p - \frac{a}{2}e_x) + D_{zx}(p + \frac{a}{2}e_y) - D_{zx}(p - \frac{a}{2}e_y) + D_{xy}(p + \frac{a}{2}e_z) - D_{xy}(p - \frac{a}{2}e_z)) \\ &= a^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} D_{yz}(p) + \frac{\partial}{\partial y} D_{zx}(p) + \frac{\partial}{\partial z} D_{xy}(p) \right) + \mathcal{O}(a^4) = a^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} D_{yz} + \frac{\partial}{\partial y} D_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} D_{xy} \right)(p) + \dots \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$-dQ = \left(\frac{\partial}{\partial x} D_{yz} + \frac{\partial}{\partial y} D_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} D_{xy} \right)(p) \cdot a^3 \underset{p \hat{=} u^*}{p} + \dots = \left(\frac{\partial}{\partial x} D_{yz} + \frac{\partial}{\partial y} D_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} D_{xy} \right) [dx \wedge dy \wedge dz; R] = dD.$$

$$D = D_{yz} [dy \wedge dz; R] + D_{zx} [dz \wedge dx; R] + D_{xy} [dx \wedge dy; R]$$

Nach dem gleichen Prinzip wie oben — nämlich durch Vergleich der kanonischen Paarung $C^0(K) \otimes C_0(K) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Schnittpaarung $C^0(K) \otimes C^3(\tilde{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ und dem hieraus resultierenden Isomorphismus $C_0(K) \xrightarrow{\sim} C^3(\tilde{K})$ — konvertieren wir die Kette $\mathfrak{g} \in C_0(K)$ der Knotenladungen in die entsprechende Ko-Kette $\mathfrak{g} \in C^3(\tilde{K})$:

$$C_0(K) \ni \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \cdot p + \dots \hat{=} \mathfrak{g}_p \cdot u^* + \dots \in C^3(\tilde{K}).$$

Per Kontinuumsannahme wird $\mathfrak{g} \in C^3(\tilde{K})$ zur ungeraden 3-Form $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{xyz} [dx \wedge dy \wedge dz; \mathbb{R}]$ der elektrischen Ladungsdichte. (**Achtung!** Gleiches Symbol $\mathfrak{g}$ für eng verwandte, aber doch verschiedene Größen.)

Nach der obigen Überlegung wird dann das Gesetz $-dQ = \mathfrak{g}$ der Ladungserhaltung zum Gaußschen Gesetz $dD = \mathfrak{g}$.

BEACHTEN den Vorzeichenwechsel: $C_1(K) \xrightarrow{-d} C_0(K)$,
geht über in $C^2(\tilde{K}) \xrightarrow{d} C^3(\tilde{K})$.

Materialgleichung im Kontinuum.

kapazitives Netzwerk: $Q_\gamma = C_\gamma V_\gamma$

Kontinuum (Vakuum): $a^2 D_{xy} = (a \epsilon_0) (a E_z)$, also $D_{xy} = \epsilon_0 E_z$ usw.

5.3 Hodge-Sternoperator

ist eine lineare Abbildung $\ast: \Omega^k(M) \rightarrow \tilde{\Omega}^{n-k}(M)$ (dim $M = n$).
(gerade k -Formen) (ungerade $(n-k)$ -Formen)

Visualisierung:

$$\ast \frac{\text{Fläche}(S)}{\text{Fläche}(S)} = \frac{\text{Länge}(\gamma)}{\text{Länge}(\gamma)} \quad (\gamma = \ast S \text{ steht senkrecht auf } S).$$

$$\ast \frac{\text{Länge}(\tilde{\gamma})}{\text{Länge}(\tilde{\gamma})} = \frac{\text{Fläche}(\Sigma)}{\text{Fläche}(\Sigma)}$$

Formale Definition.

Hier geht die Geometrie von M ein.

Metrischer Tensor $(\cdot, \cdot): \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^0(M) \equiv C^0(M)$;

ist bilinear, symmetrisch und nichtentartet.

Bilinearität bedeutet hier: $(f\alpha, \beta) = (\alpha, f\beta) = f(\alpha, \beta)$ ($f \in \Omega^0(M)$, Funktion).

Volumendichte $\equiv d\text{vol}$ (ungerade n -Form).

Beispiel: $M = E_3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z :

Konstante Funktion mit Wert 1

$$(dx, dy) = (dx, dz) = (dy, dz) = 0, \quad (dx, dx) = (dy, dy) = (dz, dz) = 1$$

$$d\text{vol} = |dx \wedge dy \wedge dz|.$$

Für $\beta \in \Omega^k(M)$ definiert man $\ast\beta \in \tilde{\Omega}^{n-k}(M)$ durch die Forderung

$$\alpha \wedge \ast\beta = (\alpha, \beta) d\text{vol} \quad \text{für alle } \alpha \in \Omega^k(M).$$

Genauso für $\beta \in \tilde{\Omega}^k(M)$, mit Ergebnis $\ast\beta \in \Omega^{n-k}(M)$.

Eigenschaften.

$$(i) \quad \alpha \wedge \ast\beta = \beta \wedge \ast\alpha.$$

$$(ii) \quad \ast 1 = d\text{vol}, \quad \ast d\text{vol} = 1.$$

$$(iii) \quad \ast(f\alpha) = f\ast\alpha.$$

$$(iv) \quad \ast^2 = (-1)^{k(n-k)} \text{Id} \quad \text{auf } \Omega^k(E_n).$$

$M = E_3$ mit orthogonalen Koordinaten.

$$\text{Kartesische Koordinaten } x, y, z: \quad \ast dx = [dy \wedge dz, \mathbb{R}] \quad \text{usw.}$$

$$\text{Kugelkoordinaten } r, \theta, \phi: \quad \ast dr = [r d\theta \wedge r \sin\theta d\phi, \mathbb{R}] \quad \text{usw.}$$

denn $dr, r d\theta, r \sin\theta d\phi$ ist wie dx, dy, dz ein rechtshändiges Orthonormalsystem.

Zylinderkoordinaten genauso ...

5.4 Elektrisches Feld einer Punktladung

Ladung q am Ort p .

$r_p : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ Abstand von p ; also $r_p(p') = |p - p'|$.

Raumwinkelform. $\tau_p \in \tilde{\Omega}^2(E_3)$ Raumwinkelform bzgl. p ;

in Kugelkoordinaten bzgl. p : $\tau_p = [d\theta_p \wedge \sin\theta_p d\phi_p; \mathbb{R}]$.

in kartesischen Koordinaten:

$$\tau_p = \frac{(x-x(p))[dy \wedge dz; \mathbb{R}] + (y-y(p))[dz \wedge dx; \mathbb{R}] + (z-z(p))[dx \wedge dy; \mathbb{R}]}{((x-x(p))^2 + (y-y(p))^2 + (z-z(p))^2)^{3/2}}.$$

WARNUNG: das Subskript p hat hier nicht die im Kontext von Formen übliche Bedeutung.

Eigenschaften von τ_p .

(i) τ_p ist definiert auf $E_3 \setminus \{p\}$ und erfüllt dort $d\tau_p = 0$.

(ii) $\int_S \tau_p = 4\pi$ (geschlossene Fläche S ; umschließt p)
die äußere Orientierung von S zeigt von p nach außen.

(iii) $\tau_p = * \frac{dr_p}{r_p^2} = \frac{(x-x(p)) * dx + (y-y(p)) * dy + (z-z(p)) * dz}{((x-x(p))^2 + (y-y(p))^2 + (z-z(p))^2)^{3/2}}.$

Elektrische Feldstärke:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr_p}{r_p^2}$$

Elektrische Erregung:

$$D = \frac{q}{4\pi} \cdot \tau_p$$

Feld eines Punkts p mit Ladung q

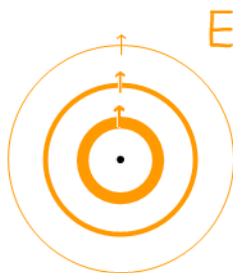
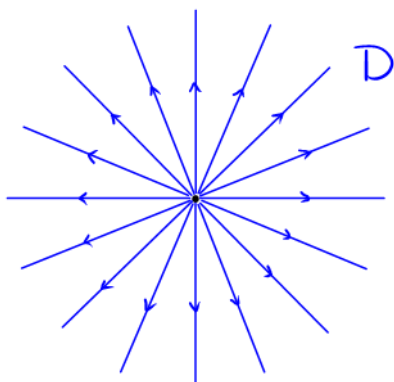
Nachweis. $dE = d^2 \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_p} \right) = 0$ (wegen $d^2 = 0$) ✓

$$D = \frac{q}{4\pi} * \frac{dr_p}{r_p^2} = \epsilon_0 * E \quad \checkmark$$

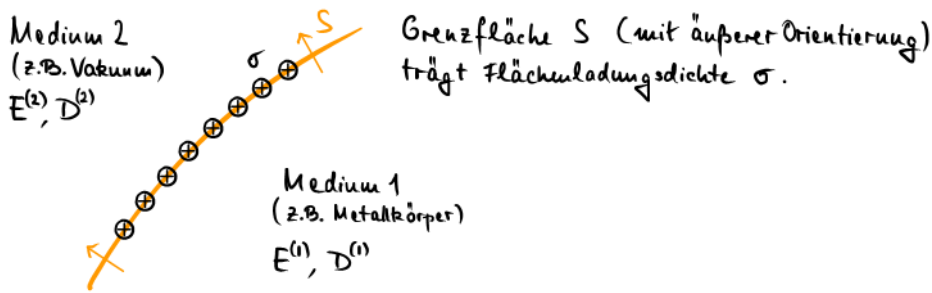
$$\int_U dD = \int_{\partial U} D = \frac{q}{4\pi} \int_{\partial U} \tau_p \stackrel{\substack{\uparrow \\ U \text{ enthält } p}}{=} q = \int_U \varrho \wedge \quad \wedge \quad dD = \varrho \quad \checkmark$$

(Der direkte Nachweis von $dD = \varrho$ erfordert etwas Distributionentheorie.)

Visualisierung.



5.5 Anschlussbedingungen an einer Grenzfläche



Definition von σ (ungerade 2-Form):

$\tau \subset S$ Teil der Grenzfläche S .

$$Q[\tau] = \text{Oberflächenladung in } \tau \equiv \int_{\tau} \sigma.$$

Anschlussbedingungen.

$E^{(j)}|_S :=$ Grenzwert von E bei Annäherung an S vom Medium j her. Genauso für D .

$E^{(2)} _{S, \text{tang}} = E^{(1)} _{S, \text{tang}}$	$(E_{\text{tang}} \text{ ist stetig})$
$D^{(2)} _{S, \text{tang}} = D^{(1)} _{S, \text{tang}} + \sigma$	$(D_{\text{tang}} \text{ hat Sprung})$

WARNUNG. Vermöge der Materialgleichung $D = \epsilon_0 * E$ korrespondiert D_{tang} zu E_{perp} (= Normalkomponente).

Nachweis. τ beliebige Teilfläche der Grenzfläche S .

Verdicke τ zu einer dünnen Schicht τ_{ϵ} um τ (Schichtdicke ϵ).

Benütze $\int_{\partial \tau_{\epsilon}} D = \int_{\tau_{\epsilon}} \rho$.

Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ folgt mit $\partial \tau_{\epsilon} \rightarrow \tau^{(2)} - \tau^{(1)} (= 0)$ die Relation

$$\int_{\tau} \sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\tau_{\epsilon}} \rho = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \tau_{\epsilon}} D = \int_{\tau^{(2)} - \tau^{(1)}} D = \int_S D^{(2)} - \int_S D^{(1)}.$$

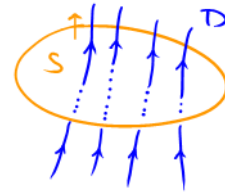
Da $\tau \subset S$ beliebig gewählt werden kann, folgt $D^{(2)} - D^{(1)}|_S = \sigma$.

Die Überlegung für E verläuft ähnlich (ausgehend von $dE = 0$).

5.6 Messvorschrift für D

Gegeben: Fläche S mit äußerer Orientierung.

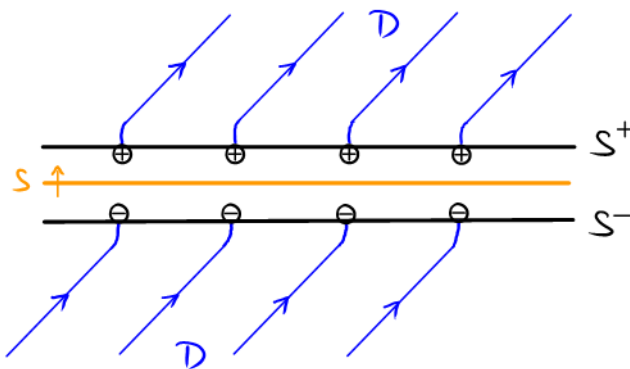
Aufgabenstellung: Messe den elektrischen Fluss $\int_S D$ durch S .



Lösung (mit der Maxwellschen Methode der Doppelplatten).

1. In der Werkstatt eine Meßsonde herstellen. Die Sonde besteht aus zwei dünnen Metallkörpern $S^\pm$, die S exakt nachgebildet sind. Die Metallkörper zur Deckung bringen, elektrische Neutralität herstellen und die Sonde an den Ort der Messung transportieren.
2. Die zwei Metallkörper am Messort S voneinander trennen. Beide sind jetzt geladen (mit gleichem Betrag, aber unterschiedlichem Vorzeichen der Ladung). Die Gesamtladung $Q[S^+]$ auf demjenigen Metallkörper messen, aus dem der Vektor der äußeren Orientierung von S herauszeigt (S^+), nicht hineinzeigt (S^-). Messergebnis $Q[S^+] = \int_S D$.

Begründung der Messvorschrift. Metallkörper im Gleichgewicht sind in ihrem Innern feldfrei ($E=0$), weil in Anwesenheit elektrischer Feldstärke eine beschleunigende Kraft auf die mobilen Ladungsträger wirkt und der Körper somit nicht im statischen Gleichgewicht sein kann. Wegen $D = \epsilon_0 \cdot E$ impliziert $E=0$ auch $D=0$. Das elektrische Feld am Messort S wird durch Oberflächenladungen auf den Metallkörpern $S^\pm$ abgeschirmt (siehe die folgende Figur). Unter Berücksichtigung der Orientierungsvorgaben misst man mit der Ladungsmenge $Q[S^+]$ genau den elektrischen Fluss $\int_S D$ (mit dem richtigen Vorzeichen).



5.7 Poisson-Gleichung & Laplace-Operator

Löse $dE = 0$ durch den Ansatz $E = -d\Phi$.

Materialgleichung: $D = \epsilon_0 * E = -\epsilon_0 * d\Phi$.

Gaußsches Gesetz $\leadsto dD = -\epsilon_0 d * d\Phi = \rho$.

Anwendung des Sternoperators auf beiden Seiten ergibt

$$-\Delta \Phi = * \rho / \epsilon_0 \quad (\text{Poisson-Gleichung})$$

mit $\Delta = * d * d$ (Laplace-Operator auf Funktionen).

Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz.$$

$$* d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} [dy \wedge dz, R] + \frac{\partial \Phi}{\partial y} [dz \wedge dx, R] + \frac{\partial \Phi}{\partial z} [dx \wedge dy, R].$$

$$d * d\Phi = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) d\text{vol}.$$

$$* d * d\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \text{also} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi.$$

$$* d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} [r d\theta \wedge r \sin\theta d\varphi, R] + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} [r \sin\theta d\varphi \wedge r dr, R] + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} [dr \wedge r d\theta, R].$$

$$d * d\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) [dr \wedge d\theta \wedge d\varphi, R].$$

$$* [dr \wedge d\theta \wedge d\varphi, R] = \frac{1}{r^2 \sin\theta}.$$

$$* d * d\Phi = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right).$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Lösung der Poisson-Gleichung im Fall, dass ρ vorgegeben ist.

Potential einer Punktladung q am Ort p' : $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{p'}}$ ($\Phi(\infty) = 0$).

$$\text{oder: } \Phi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_p(p)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_p(p')}$$

$\leadsto$ Potential einer Ladungsverteilung mit Dichte ρ (durch lineare Überlagerung):

$$\Phi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r_p}$$

5.8 Multipolentwicklung (kartesisch)

Ladungsdichte ρ bekannt. Alle Ladungen enthalten in beschränktem Gebiet U ; z.B. $U = B_R(0)$.

Ziel: berechne das Potential $\Phi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_U \frac{\rho}{r_p}$ für Orte p weit außerhalb von U .

$$r_p(\cdot) = \text{dist}(\cdot, p) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i(\cdot) - x_i(p))^2} = \sqrt{r^2(p) - 2 \sum_{i=1}^3 x_i(p) x_i(\cdot) + r^2(\cdot)}$$

Anwendung der Taylor-Entwicklung

$$(1+a)^{-1/2} = 1 - \frac{a}{2} + \frac{3}{8} a^2 + O(a^3)$$

auf das Reziproke der Abstandsfunktion ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_p(\cdot)} &= \frac{1}{r(p)} \left(1 + \frac{r^2(\cdot) - 2 \sum x_i(p) x_i(\cdot)}{r^2(p)} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r(p)} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i(p)}{r^3(p)} x_i(\cdot) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i(p) x_j(p)}{r^5(p)} (3 x_i(\cdot) x_j(\cdot) - \delta_{ij} r^2(\cdot)) + \dots \end{aligned}$$

Definiere die **Multipolmomente**:

Monopolmoment: $q^{(0)} = \int_U \rho$ (Gesamtladung); Skalar

Dipolmoment: $q_i^{(1)} = \int_U x_i \rho$ ($i = 1, 2, 3$); Vektor

Quadrupolmoment: $q_{ij}^{(2)} = \int_U (x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2) \rho$ symmetrischer Tensor 2. Stufe; spurlos.

Dann hat man für das elektrische Skalarpotential die (Multipol-) Entwicklung

$$4\pi\epsilon_0 \Phi = \frac{q^{(0)}}{r} + \sum_{i=1}^3 q_i^{(1)} \frac{x_i}{r^3} + \frac{3}{2} \sum_{i,j} q_{ij}^{(2)} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots$$

5.9 Randwertaufgaben

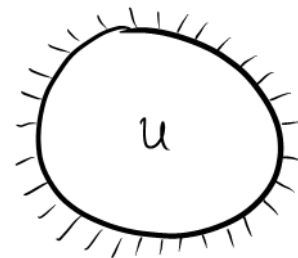
Gebiet U (zusammenhängend, abgeschlossen, kompakt) mit Rand ∂U .

Poisson-Problem: gegeben ist $\rho \neq 0$ auf $U \setminus \partial U$ und $\Phi = 0$ auf ∂U .

Dirichlet-Problem: gegeben ist $\rho = 0$ auf $U \setminus \partial U$ und $\Phi \neq 0$ auf ∂U .

Gesucht wird in beiden Fällen: ρ auf ∂U und Φ auf $U \setminus \partial U$.

Methodisch geht man genauso vor wie für kapazitive Netzwerke.



5.9.1 Greensche Funktion

Zum Gebiet $U \subset E_3$ und dem Laplace-Operator Δ existiert eine eindeutig bestimmte

Greensche Funktion $G: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$. Sie ist definiert durch die Forderungen

(i) $\Delta G(\cdot, p) = 0$ auf $U \setminus \{p\}$.

(ii) $G(\cdot, p)|_{\partial U} = 0$.

(iii) $\Delta G(\cdot, p) - \frac{1}{4\pi r_p}$ ist regulär in p .

Interpretation. $G(A, B)/\epsilon_0$ ist das elektrische Skalarpotential am Ort A , wenn sich im Punkt B eine Einheitsladung befindet und der Rand ∂U geerdet ist.

Mitteilung. Die Greensche Funktion zu Δ ist symmetrisch: $G(A, B) = G(B, A)$.

(Beweis mittels Greenscher Reziprozität $\int_U \Phi^{(A)} \rho^{(B)} = \int_U \Phi^{(B)} \rho^{(A)}$; siehe unten).

Lösung des Poisson-Problems für Φ : $\Phi(p) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_U G(p, \cdot) \rho$.

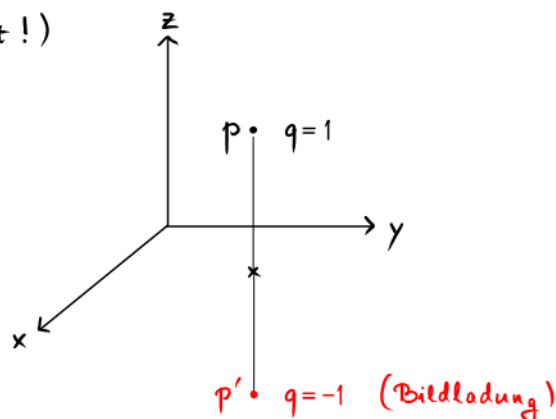
Beispiel. $U =$ Halbraum (nicht kompakt, deshalb Vorsicht!)

Sei $U = \{p \in E_3 \mid z(p) \geq 0\}$, $\partial U = xy$ -Ebene.

Greensche Funktion mittels Trick ("Bildladungsmethode"):

$$G(\cdot, p) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_{p'}} \right),$$

$$z(p') = -z(p), \quad x(p') = x(p), \quad y(p') = y(p).$$



Nachweis. (i) $\Delta G(\cdot, p) \stackrel{\checkmark}{=} 0$ auf $U \setminus \{p\}$, denn $\Delta \frac{1}{r_{p'}} = 0$ auf U .

(ii) $(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_{p'}})|_{xy\text{-Ebene}} = 0 \wedge G(\cdot, p)|_{\partial U} \stackrel{\checkmark}{=} 0$.

(iii) $\Delta G(\cdot, p) - \frac{1}{4\pi r_p} = \frac{1}{4\pi r_{p'}}$ ist $\checkmark$ regulär auf U .

Bemerkung. Auf der geerdeten xy -Ebene sammelt sich ein Kontinuum von Influenzladungen an, die die Ladung in p abschirmen. Aus Symmetriegründen ist der Effekt dieses Kontinuums (auf U) exakt gleich dem Effekt (auf U) einer einzigen Bildladung in p' .

Lösung des Poisson-Problems für $\sigma = g|_{\partial U}$.

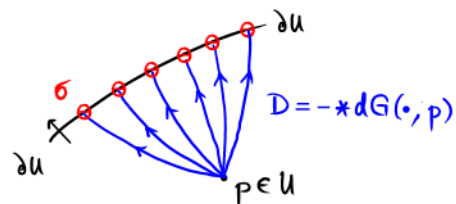
$G(\cdot, p)/\epsilon_0 =$ elektrisches Skalarpotential (Einheitsladung in p , Rand von U geerdet).

$\leadsto -dG(\cdot, p)/\epsilon_0 =$ elektrische Feldstärke (...).

$\leadsto *dG(\cdot, p) =$ elektrische Flussdichte (...).

Anschlussbedingung (mit $D \equiv 0$ außerhalb von U)

$\leadsto$ Flächenladungsdichte (...): $\sigma = *dG(\cdot, p)$



Poisson-Kern. Für jeden Punkt $p \in U$ haben wir also eine ungerade 2-Form $-*dG(\cdot, p) \equiv K^{(p)}$ auf ∂U . Die Zuordnung $p \rightarrow K^{(p)}$ heißt der Poisson-Kern des Gebiets U mit Rand ∂U .

Interpretation: der Poisson-Kern $K^{(p)}$ ist gleich (minus) der Flächenladungsdichte (auf der Grenzfläche ∂U), die sich einstellt, wenn eine Einheitsladung am Ort p sitzt und ∂U geerdet ist.

Mittels Aufbau eines Ladungskontinuums g aus Punktladungen an allen Orten $\cdot \in U$ erhalten wir (durch lineare Superposition der Einzelbeiträge nach obigem Ergebnis für σ) für einen Randpunkt $B \in \partial U$

$$\sigma_B = - \int_U K_B^{(\cdot)} g \quad (\text{Lösung des Poisson-Problems für } \sigma).$$

Vergleiche mit analoger Formel für kapazitive Netzwerke:

$$g_B = - \sum_p K_B(p) g_p \quad (\text{Poisson-Kern } K).$$

Beispiel. Halbraum $z \geq 0$ (wie oben).

$$\begin{aligned} K^{(p)} &= -*dG(\cdot, p)|_{\partial U} = -*d\left(\frac{1}{4\pi r_p} - \frac{1}{4\pi r_{p'}}\right)\Big|_{xy\text{-Ebene}} = \frac{1}{4\pi} (\tau_p - \tau_{p'})\Big|_{xy\text{-Ebene}} \\ &= \frac{1}{4\pi} ((z - z(p)) - (z - z(p'))) \frac{[dx \wedge dy; \mathbb{R}]}{r_p^3} \Big|_{z=0} = -\frac{z(p)}{2\pi} \frac{[dx \wedge dy; \mathbb{R}]}{((x - x(p))^2 + (y - y(p))^2 + z(p)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe. (i) Für U kompakt gilt $\int_U K^{(p)} = 1$.

(ii) Stimmt das auch noch für $U =$ Halbraum ($z \geq 0$)?

5.9.2 Greensche Identitäten

Definiere ein Skalarprodukt (vom Euklidischen Typ) für 1-Formen α, β auf U :

$$(\alpha|\beta)_U := \int_U \alpha \wedge * \beta = \int_U \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \beta_i \right) d\text{vol} \quad (\text{kartesische Komponenten } \alpha_i, \beta_i).$$

Physikalische Bedeutung: $2\varepsilon_0 (E, E)_U$ ist die Energie des elektrischen Feldes in U .

Setze $\alpha = df$ und $\beta = dg$ (Funktionen f, g).

$$(df, dg)_U = \int_U df \wedge * dg = \int_U d(f * dg) - \int_U f d * dg.$$

Es folgt

$$(df, dg)_U = \int_{\partial U} f * dg - \int_U f * \Delta g \quad (1. \text{ Greensche Identität}).$$

f und g austauschen und Gleichungen subtrahieren gibt

$$\int_{\partial U} (f * dg - g * df) = \int_U (f * \Delta g - g * \Delta f) \quad (2. \text{ Greensche Identität})$$

Lösung des Dirichlet-Problems für Φ .

Sei $B_\varepsilon(p)$ Kugel mit Mittelpunkt p und Radius ε (beabsichtigt ist $\varepsilon \rightarrow 0$).

Verwende 2. Greensche Id. mit $f \equiv \Phi$, $g \equiv G(\cdot, p)$ und Gebiet $U \setminus B_\varepsilon(p)$.

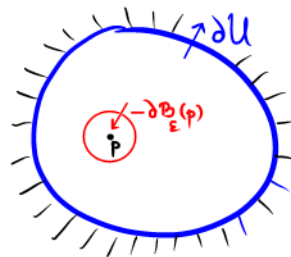
Die rechte Seite der 2. G. Id. verschwindet wegen $\Delta \Phi = 0$ (Dirichlet-Problem)

und $\Delta G(\cdot, p) = 0$ auf $U \setminus \{p\} \supset U \setminus B_\varepsilon(p)$.

Mit $\partial(U \setminus B_\varepsilon(p)) = \partial U - \partial B_\varepsilon(p)$ (2-Kette mit äußerer Orientierung)

folgt für die linke Seite

$$\int_{\partial U} (\Phi * dG(\cdot, p) - G(\cdot, p) * d\Phi) - \int_{\partial B_\varepsilon(p)} (\Phi * dG(\cdot, p) - G(\cdot, p) * d\Phi) = 0.$$



Der zweite Term verschwindet wegen $G(\cdot, p)|_{\partial U} = 0$. Der vierte Term verschwindet im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$,

weil Fläche $(\partial B_\varepsilon(p)) \sim \varepsilon^2$ und $G(\cdot, p)|_{\partial B_\varepsilon(p)} \sim \frac{1}{\varepsilon}$. Der dritte Term:

$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \Phi * dG(\cdot, p) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \Phi * d \frac{1}{4\pi r_p} = \Phi(p) \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \frac{1}{4\pi} = \Phi(p).$$

Der erste Term: $\int_{\partial U} \Phi * dG(\cdot, p) = - \int_{\partial U} \Phi K(p)$ (Poisson-Kern K).

Ergebnis: $\Phi(p) = \int_{\partial U} \Phi K(p)$ (Lösung des Dirichlet-Problems für Φ).

Vergleiche mit analoger Formel für kapazitive Netzwerke:

$$\Phi(p) = \sum_R \Phi(R) K_R(p) \quad (\text{Poisson-Kern } K).$$

Greensche Reziprozität.

Es seien $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}$ Potentialfunktionen mit $\Delta\Phi^{(i)} = 0$ ($i=1,2$) außerhalb von U .

Dann gilt $\int_U \Phi^{(1)} \rho^{(2)} = \int_U \Phi^{(2)} \rho^{(1)}$ für $\rho^{(i)} = -\epsilon_0 * \Delta\Phi^{(i)}$ ($i=1,2$).

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } \int_U \Phi^{(1)} \rho^{(2)} &= -\epsilon_0 \int_{E_3} \Phi^{(1)} d * d\Phi^{(2)} = \epsilon_0 \int_{E_3} d\Phi^{(1)} \wedge * d\Phi^{(2)} = \epsilon_0 \int_{E_3} E^{(1)} \wedge * E^{(2)} = \int_{E_3} E^{(1)} \wedge D^{(2)} \\ &= \epsilon_0 \int_{E_3} E^{(2)} \wedge * E^{(1)} = \dots = \int_U \Phi^{(2)} \rho^{(1)}. \end{aligned}$$

Aufgabe. Verkürzte Herleitung der Lösung des Dirichlet-Problems mittels Greenscher Reziprozität.

5.9.3 Bildladungsmethode für $U = \text{Kugel}$

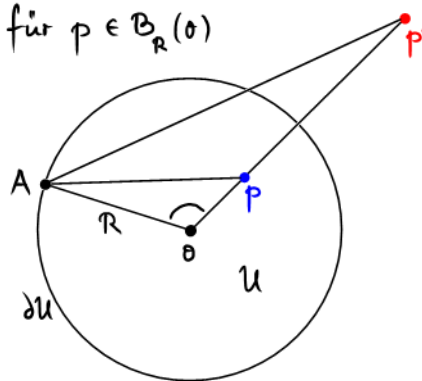
Kugel $U = B_R(0)$ mit Mittelpunkt 0 (Koordinatenursprung) und Radius R .

Berechne die Greensche Funktion $G(\cdot, p)$ zu U für $p \in B_R(0)$

mittels Bildladungsmethode (Kelvin).

Sei dazu p' der Punkt auf dem Strahl

von 0 durch p mit $\frac{r(p')}{R} = \frac{R}{r(p)}$.



Dann gilt: $\frac{1}{r_p(\cdot)} = \frac{R/r(p)}{r_{p'}(\cdot)}$ auf ∂U .

Beweis. Dreieck $(0pA)$ ist ähnlich zum Dreieck $(0Ap')$. Es folgt

$$|A-p'|/r(p') = |A-p|/R \quad \text{und somit} \quad \frac{R}{r_p(A)} = \frac{r(p')}{r_{p'}(A)} = \frac{R^2/r(p)}{r_{p'}(A)} \quad \blacksquare$$

Platziere Bildladung $q = -R/r(p)$ am Ort p' .

$\leadsto$ Ausdruck für die Greensche Funktion: $G(\cdot, p) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_p(\cdot)} - \frac{|q|}{r_{p'}(\cdot)} \right), \quad |q| = R/r(p).$

Bemerkung zu theoretischem Hintergrund: konforme Abbildungen

Aufgabe. (i) Verifiziere $G(A, B) = G(B, A)$. (ii) Berechne den zugehörigen Poisson-Kern.

5.10 Energiebetrachtungen

Ermittle die elektrostatische Energie eines Systems von N Punktladungen:

Punktladung q_1 am Ort p_1 bewirkt elektrische Feldstärke $E^{(1)} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr_{p_1}}{r_{p_1}^2}$.

Bringe zweite Punktladung q_2 aus dem Unendlichen an den Ort p_2 .

$\leadsto$ Arbeit $W_{12} = -q_2 \int_{\infty}^{p_2} E^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|p_1 - p_2|}$.

Bringe dritte Punktladung q_3 von ∞ nach p_3 $\leadsto$ Arbeit $W_{13} + W_{23}$.

Prozedur fortsetzen ... Gesamtarbeit für N Punktladungen ist Summe über

$N(N-1)/2$ Paare:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{q_i q_j}{|p_i - p_j|}.$$

Anders geschrieben: $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi^{(i)}(p_i) q_i$, $\Phi^{(i)}(\cdot) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|\cdot - p_j|}$.

Übergang zum Ladungskontinuum (Ladungen "verschmiert"; keine Punkte mehr):

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \int \Phi \rho.$$

$\tilde{W}$ durch das elektrische Feld ausdrücken:

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \int \Phi dD = -\frac{1}{2} \int d\Phi \wedge D = \frac{1}{2} \int E \wedge D.$$

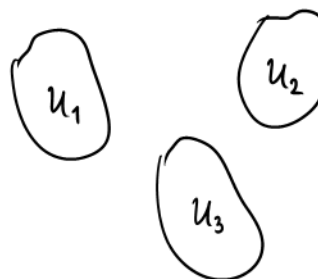
Beachte: $\tilde{W} \geq 0$. Hingegen kann W auch negativ werden.

Unterschied: $\tilde{W}$ enthält Selbstenergiebeiträge!

Kapazitätskoeffizienten.

Betrachte N elektrische Leiter $U_1, \dots, U_N$.

$$\Phi|_{U_i} \equiv \Phi_i \quad (i=1, \dots, N). \quad \Phi(\infty) = 0.$$



$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \int \Phi \rho = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i. \quad \text{Drücke } Q_i \text{ (Ladung auf } U_i) \text{ durch Potentiale aus.}$$

Potentiale vorgegeben $\sim$ Dirichlet-Problem auf $E_3 \setminus \{\bigcup_{i=1}^N U_i\}$.

$$\sim \Phi(p) = \sum_{j=1}^N \Phi_j K_j(p), \quad \text{integrierter Poisson-Kern: } K_j(p) = - \int_{-\partial U_j} *dG(\cdot, p).$$

Aus der Potentialfunktion Φ können wir in der bekannten Weise Q_i bestimmen:

$$D = -\epsilon_0 *d\Phi = -\epsilon_0 \sum_j \Phi_j *dK_j$$

$$\sim Q_i = \int_{\partial U_i} D = -\epsilon_0 \sum_j \Phi_j \int_{\partial U_i} *dK_j = \sum_j C_{ij} \Phi_j. \quad \text{Symmetrie der Greenschen Funktion}$$

Kapazitätskoeffizienten: $C_{ij} = -\epsilon_0 \int_{\partial U_i} *dK_j = -\epsilon_0 \int_{\partial U_j} *dK_i = C_{ji}$.

Ergebnis: $\tilde{W} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} \Phi_i \Phi_j$.