Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
P. Kuhn

Mathematatische Methoden der Physik
11. Übung

Wintersemester 2006/2007

36. Gewinnchancen beim Lotto

4 Punkte

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit beim Lotto (6 aus 49) $n = 1 \dots 6$ Treffer zu haben?

37. Glücksspiel im 17. Jahrhundert

4+4 Punkte

Die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung entstammen der theoretischen Beschäftigung mit Glücksspielen. Mitte des 17. Jahrhunderts war folgende Wette beliebt: „Wetten, daß bei vier aufeinanderfolgenden Würfen mit einem Würfel mindestens einmal die Sechs auftritt“.

a) Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit.

b) Der Glücksspieler Chevalier de Méré schlug folgende Abwandlung vor: „Wetten, daß bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens ein Sechserpasch auftritt“. Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit.

38. Das Geburtstagsparadoxon

** Punkte*

Ermitteln Sie ein Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Wir nehmen an, dass alle Geburtstermine gleichwahrscheinlich sind und kümmern uns nicht um Schaltjahre.
Hinweis: Hier ist es vorteilhaft zuerst die *Gegenwahrscheinlichkeit* auszurechnen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass *keine* der Personen am selben Tag Geburtstag hat. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann Eins minus Gegenwahrscheinlichkeit.

39. Buffons Nadel

** Punkte*

Eine Nadel der Länge L wird zufällig auf ein liniertes Blatt Papier (Linienabstand $a \geq L$) geworfen. Zufällig soll hier bedeuten, dass der Winkel der Nadelrichtung gleichverteilt zwischen 0 und 2π liegt. Wie viele Linien wird die Nadel im Mittel schneiden?
Anmerkung: Das Ergebnis ist wegen $a \geq L$ kleiner als Eins und enthält die Kreiszahl π. Wiederholt man das Experiment genügend oft, lässt sich also (im Prinzip zumindest) ein Näherungswert für π bestimmen.

40. Bedingte Wahrscheinlichkeiten **+4 Punkte*

a) In einem Topf befinden sich 6 weiße und 4 schwarze Kugeln. Es werden zufällig zwei Kugeln gezogen (ohne sie zurückzulegen). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

- beim ersten Mal ein schwarze Kugel zu ziehen.
- beim zweiten Mal eine schwarze Kugel zu ziehen.
- beide Male eine schwarze Kugel zu ziehen.

b) Angenommen, Ihnen stehen drei Internetprovider X, Y und Z zur Verfügung. X hat 250 Telefoneingänge, von denen durchschnittlich 30% besetzt sind, Y hat 100 mit durchschnittlicher Belegung von 20% und Z hat 50 Eingänge mit 30%. Alle werden über eine gemeinsame Telefonnummer angesteuert, die dann zufällig mit einem der Providereingänge verbunden wird. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie einen freien Eingang finden? Falls der Anschluss besetzt ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit sind Sie bei Provider Z gelandet?

Hinweis: Satz von Bayes.

41. Diskrete und kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen **+*+4 Punkte*

Gegeben sei eine Zufallsvariable X. Berechnen Sie den Mittelwert $\langle X \rangle$, das zweite Moment $\langle X^2 \rangle$ und die Varianz $\Delta X = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ für folgende Verteilungen

a) Die beiden Ergebnisse $X = 1$ und $X = -1$ seien gleichwahrscheinlich, d.h. $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

b) X nimmt kontinuierliche Werte zwischen 0 und 1 an, wobei alle Werte gleichwahrscheinlich sein sollen.

c) $X \in [0, \infty)$ gehorcht einer exponentiellen Verteilung $f(x) = \frac{1}{N} e^{-\lambda x}$, wobei λ ein Parameter ist und N durch die Normierung bestimmt wird. Bestimmen Sie neben den ersten beiden Momenten und der Varianz auch den Zusammenhang zwischen N und λ.

42. Stirling-Formel *4 Punkte*

Für die näherungsweise Berechnung von $n!$ ist die Stirling-Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \tag{1}$$

von zentraler Bedeutung. Oft genügt auch schon $n! \approx n^n e^{-n}$. Leiten Sie diese einfachere Version her, indem Sie zuerst $\ln(n!)$ als eine Summe schreiben und diese dann näherungsweise durch ein Integral ausdrücken. Diese Ersetzung einer Summe $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ durch das Integral $\int_1^N f(x)\, dx$ wird Ihnen noch häufiger begegnen.
Um ein Gefühl für die Qualität der Näherung zu bekommen, empfiehlt es sich für ein paar Werte die Fakultät mit dem Ergebnis der Formel (1) zu vergleichen.

43. Das Ziegenproblem

** Punkte*

In einer Spielshow soll ein Kanditat zwischen drei Toren wählen. Hinter einer steht ein Auto, hinter den anderen befinden sich Ziegen. Nachdem er gewählt hat, wird eines der beiden anderen Tore geöffnet, hinter dem eine Ziege zum Vorschein kommt. Der Moderator bietet dem Kandidaten an das Tor zu wechseln.

a) Verbessern sich die Gewinnchancen, wenn der Kandidat wechselt?
Hinweis: Die Intuition (auch die von Mathematikern) geht hier in den meisten Fällen in die Irre.

b) Um der Intuition auf die Sprünge zu helfen nehmen wir nun an, es handle sich um 1000 Tore. Nachdem der Kandidat eines ausgewählt hat öffnet der Moderator 998 der anderen. Hinter allen stecken natürlich Ziegen. Würden Sie jetzt wechseln?