Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
P. Kuhn

Mathematische Methoden der Physik
8. Übung

Wintersemester 2006/2007

22. Fourierreihen

**+5 Punkte*

Zeigen Sie die Fourrierreihen der folgenden Funktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

a) $f(x) = x$: $\quad f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$

b) $f(x) = |x|$: $\quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

23. Fouriertransformationen

**+4+4+4 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie die Fouriertransformation einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennengelernt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) e^{i\omega x} \qquad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i\omega x}. \tag{1}$$

Im folgenden bezeichnet $\mathcal{F}(f(x)) = F(\omega)$. Zeigen Sie:

a) Die folgenden Symmetrieeigenschaften der Fouriertransformation:

$f(x)$	$F(\omega)$
Reell und gerade	Reell und gerade
Reell und ungerade	Imaginär und ungerade
Imaginär und gerade	Imaginär und gerade
Imaginär und ungerade	Reell und ungerade
Reell	Realteil gerade, Imaginärteil ungerade
Imaginär	Realteil ungerade, Imaginärteil gerade

b) Die Gleichung von Parseval: Für reelle Funktionen $f(x), g(x)$ und ihre Fouriertransformierte $F(\omega), G(\omega)$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) G^*(\omega),$$

wobei $G^*(\omega)$ die Komplexkonjungierte von $G(\omega)$ ist.

c) Den Verschiebungssatz: Für $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-i\omega a}\mathcal{F}(f(x)). \tag{2}$$

d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $\cos(ax)$ und $\delta(x)$.

24. Lösung von DGLs mit Fouriertransformation **+8 Punkte*

a) Lösen Sie die DGL für den harmonischen Oszilator,

$$m\ddot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) = 0, \tag{3}$$

durch Fouriertransformation. Hier ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Koordinate eines Massenpunktes und $\omega \in \mathbb{R}$. Verfahren Sie dabei wie folgt: (i) Fouriertransformieren Sie Gl. (3) in eine algebraische Gleichung für $X(\omega)$, (ii) lösen Sie diese algebraische Gleichung und (iii) Fouriertransformieren Sie die Lösung zurück.

b) Lösen Sie nun durch analoges Vorgehen die DGL für den gedämpften harmonischen Oszilator,

$$m\ddot{x}(t) + m\gamma\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) = 0, \tag{4}$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis. Unterscheiden Sie dabei insbesondere die Fälle $\omega_0 > \gamma/2$ und $\omega_0 < \gamma/2$.

25. Feldgleichung der Graviatation *4+*+*+4 Punkte*

Berechnen Sie für $\mathbf{x} \neq 0$: $\nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$

a) durch explizites nachrechnen,

b) indem Sie den Satz von Gauß auf Kugelschalen beliebiger Dicke anwenden.

c) Überlegen Sie, ebenfalls unter Verwendung des Satzes von Gauß, was $\nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ist.

d) Zeigen Sie nun, daß das Gravitationsfeld einer Massenverteilung ρ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}) = G \int d^3x \rho(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}$$

der Feldgleichung aus Aufgabe 20, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi G\rho$, folgt.