
Mathematische Methoden der Physik

9. Übung

Wintersemester 2006/2007

26. Darstellungen der Deltafunktion

*+4 Punkte

Überzeugen Sie sich, daß die Deltafunktion folgende Darstellungen besitzt:

a) $\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{a}},$

b) $\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{x^2 + a^2}.$

Zeigen Sie dazu, daß die Ausdrücke auf der rechten Seiten (i) für $x \neq 0$ verschwinden, (ii) für $x = 0$ divergieren und (iii) integriert über $\mathbb{R}$ eins ergeben.

27. Eigenschaften der Deltafunktion

++4+4 Punkte

Zeigen Sie, daß

a) $\frac{d}{dx} \delta(x - x_0) = -\delta(x - x_0) \frac{d}{dx},$

b) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x),$

c) für eine Funktion f mit einfachen Nullstellen $x_0^1, \dots, x_0^n$:

$$\delta(f(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x_0^k) \right|} \delta(x - x_0^k),$$

d) die Stufenfunktion $\Theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > x_0 \\ 0 & \text{für } x < x_0 \end{cases}$ eine Stammfunktion von $\delta(x - x_0)$ ist.

28. Zylinder- und Kugelkoordinaten

*+4 Punkte

Stellen Sie Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in folgenden Basissystemen dar

a) Zylinderkoordinaten,

b) Kugelkoordinaten.

29. Eigenwerte und Eigenvektoren

**+4+4 Punkte*

Berechnen Sie Eigenwerte und (rechte) Eigenvektoren der folgenden Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -30 & -13 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Für welche der Matrizen sind (i) linke und rechte Eigenvektoren identisch und (ii) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal?

30. Basis- und Koordinatenwechsel

**+4+4 Punkte*

Finden Sie Matrizen, welche die Matrizen aus Aufgabe 29 diagonalisieren und stellen Sie die

Koordinatenvektoren (bezüglich der alten Basis) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der neuen Basis dar.