Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl

Mathematische Methoden der Physik
Präsenzübung

Wintersemester 2007/2008

Internetseite: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mathmeth07.html/*

1. Koordinaten als Vektoren

Durch die gerichtete Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten innerhalb der Zeichenebene kann ein sogenannter Repräsentant eines Vektors definiert werden, z.B. wird der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ durch die gerichtete Verbindung $\overrightarrow{PQ}$ zwischen den Punkten $P = (0, 0)$ und $Q = (1, 2)$ repräsentiert. Nun sei mit dem Anfangspunkt $P_1 = (3, 2)$ und dem Endpunkt $P_2 = (7, 5)$ ein Repräsentant des Vektors $\underline{a}$ gegeben.

a) Wie lässt sich der Vektor $\underline{a}$ schreiben?

b) Zeichnen Sie den Vektor $\underline{a}$ gemäß obiger Beschreibung als Verbindungsvektor zwischen P_1 und P_2.

c) Geben Sie den Endpunkt P_2' eines weiteren Repräsentanten dieses Vektors $\underline{a}$ an, wenn der Anfangspunkt $P_1' = (-3, -1)$ ist.

d) Gegeben seien die Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Geben Sie den Summenvektor $\underline{c}=\underline{a}+\underline{b}$ an.

e) Die Koordinaten (x,y) gehen in die Koordinaten (x', y') über, indem der Koordinatenursprung 0 um den Vektor $\vec{s} = (-1, 3)$ verschoben wird. Berechnen Sie die neuen Koordinaten der Punkte $P_1 = (-3, 4)$, $P_2 = (-5.5, 0)$, $P_3 = (3, 5.5)$, $Q_1 = (1, 2)$, $Q_2 = (2.5, -4)$ und $Q_3 = (-2.5, -1.5)$.

f) Berechnen Sie die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_jQ_j}$ zwischen P_j und Q_j für $j = 1, 2, 3$. Wie unterscheiden sich die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_jQ_j}$ von den $\overrightarrow{P_j'Q_j'}$?

2. Umformungen

Vereinfachen Sie die folgenden Vektorausdrücke ($\underline{a}$, $\underline{b}$ sind Vektoren, λ ist ein von 0 verschiedener Skalar.):

a) $\underline{b}$-(2$\underline{a}$-$\underline{c}$) **b)** $\underline{b}$ - ($\underline{a}$ - 3$\underline{b}$) **c)** $\lambda\ \underline{a}+\underline{a}$

d) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{a}+\underline{b})$ - $\frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{a}-\underline{b})$ **e)** $\underline{b}$ - $\frac{3}{\lambda}(\lambda\underline{a} + \lambda\, \underline{b})$ **f)** $\underline{a}$ - $\frac{1}{5}(\underline{b}$ - $5\underline{a})$

3. Basen

Gegeben seien die Basen $\mathcal{B}_1 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ und $\mathcal{B}_2 = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ mit den Beziehungen $\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$ und $\underline{v}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$. Benutzen Sie die Definition

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2$$

aus der Vorlesung (analog für $\mathcal{B}_2$), um die folgenden Vektoren von ihrer Darstellung in $\mathcal{B}_2$ in ihre Darstellung in $\mathcal{B}_1$ umzuschreiben.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = 2\underline{v}_1 = 2\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

d) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ **e)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ **f)** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$