Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl

Mathematische Methoden der Physik
1. Übung

Wintersemester 2007/2008

Internetseite: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth07.html/*
Die Rückgabe der Übungen erfolgt am Dienstag, den 23.10.2007 vor der Vorlesung. Zu diesem Zeitpunkt werden ab sofort alle neuen Übungsblätter ausgegeben.

1. Walfisch im Atlantik *10 Punkte*

Ein Wal schwimmt im Atlantik erst 10 Stunden mit 5 km/h nach Süden dann 3 Stunden mit 10 km/h nach Nordwesten und schließlich 1 Stunde mit 12km/h nach Osten. Wählen Sie für die Komponentendarstellung folgende orthonormale Basis:

$$\text{Nordrichtung} \mathrel{\hat{=}} \underline{e}_1 \text{ und Ostrichtung} \mathrel{\hat{=}} \underline{e}_2$$

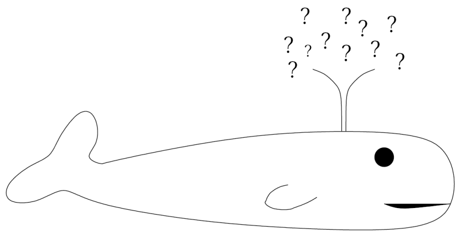
a) Geben Sie die Geschwindigkeitsvektoren für die drei Teilstrecken an.

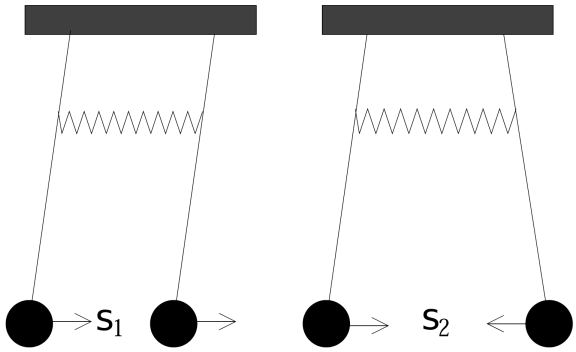
b) Geben Sie den Vektor der mittleren Geschwindigkeit an.

c) Um welchen Vektor verschiebt sich die Position des Wales insgesamt?

d) Wiederholen Sie die Rechnungen von Teil a, b und c; nehmen Sie jedoch zusätzlich an, dass der Wal sich mit den angegebenen Geschwindigkeiten relativ zum Golfstrom bewegt, der mit 5km/h nach Osten fließt.

e) In seiner Freizeit beschäftigt sich der Wal mit einem Doppelpendel, da auch hier Vektoroperationen von Bedeutung sind. Das Pendel besteht aus zwei starren, durch eine starke Feder miteinander verbundenen Stäben und zwei Massekörpern. Die beiden unabhängigen Schwingungsmoden des Pendels lassen sich als Vektoren in einem zweidimensionalen Vektorraum auffassen. Dabei bezeichne $\underline{s}_1$ die gleichgerichtete Schwingung, $\underline{s}_2$ die gegenläufige; die zugehörigen Schwingungsdauern seien 10 s bzw. 1/10s, die Auslenkungen seien jeweils 1 cm. Erläutern Sie anschaulich, was für eine Bewegung der Vektor $\underline{a} = 5\underline{s}_1 + \frac{1}{10}\underline{s}_2$ beschreibt.





2. Skalarprodukte und ihre Eigenschaften *10 Punkte*

a) Was ist ein Skalarprodukt?

b) Wie ist die Orthogonalität zweier Vektoren und der Betrag eines Vektors durch ein Skalarprodukt definiert?

c) Aus der geometrischen Bedeutung von Orthogonalität und Betrag folgen die Eigenschaften (warum?)

$$
\begin{array}{rl}
\text{(i)} & \underline{a} \perp \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \lambda\underline{a} \perp \underline{b} \\
\text{(ii)} & \underline{a} \perp \underline{b} \text{ und } \underline{c} \perp \underline{b} \quad \Rightarrow \quad (\underline{a}+\underline{c}) \perp \underline{b} \\
\text{(iii)} & |\lambda\underline{a}| = |\lambda||\underline{a}| \\
\text{(iv)} & \underline{a} \perp \underline{b} \quad \Rightarrow \quad |\underline{a}+\underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2
\end{array}
$$

Zeigen Sie, dass die Definitionen von Orthogonalität und Betrag über das Skalarprodukt diese Eigenschaften respektieren!

3. Komponenten *10 Punkte*

Gegeben sei eine Orthonormalbasis $B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ eines euklidischen Vektorraums V.

a) Wie lauten die Basisvektoren $\underline{e}_1$,$\underline{e}_2$,$\underline{e}_3$ in Komponentendarstellung bzgl. B?

b) Zeigen Sie, dass die Komponenten eines Vektors $\underline{a} \in V$ bezgl. B durch $a_i = \langle \underline{e}_i, \underline{a} \rangle$ bestimmt sind (i=1,2,3).

Eine zweite Basis $B' = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ sei gegeben durch

$$\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_2 + \underline{e}_3),\ \underline{f}_2 = -\underline{e}_1,\ \underline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{e}_2 + \underline{e}_3).$$

c) Wie lauten die Basisvektoren $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ und $\underline{f}_3$ in Komponentendarstellung bzgl. der alten Basis B?

d) Zeigen Sie, dass B' eine Orthonormalbasis ist.

e) Wie lautet die Komponentendarstellung des Vektors $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B$ bzgl.der Orthonormalbasis B' ?