Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl & P. Jung

Mathematische Methoden der Physik
Übung 12

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreiben Sie stets Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe am 29.1.08.

1. Matrizen

4 + 3 + 3 + 2 Punkte

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Vektoren im $\mathbb{R}^n$ lassen sich als $n \times 1$ Matrizen interpretieren. So sind $\vec{v} = C$ und $\vec{w} = A^T$ auch Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

a) Berechnen Sie folgende Matrixprodukte: AB, AC und CA. Existiert das Matrixprodukt BA? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Überprüfen Sie explizit das Distributivgesetz für Matrizen: $(AB)C = A(BC)$. (Dies gerechtfertigt die Schreibweise ABC für dieses Matrixprodukt.)

c) Bestimmen Sie B^{-1}.

d) Eine orthogonale Matrix ist eine Matrix mit der Eigenschaft $M^{-1} = M^T$. Für welche Werte von a und b ist die Matrix B orthogonal?

2. Determinanten

4+1+1+2+4+2 Punkte

In der Vorlesung haben Sie die Leibniz-Formel für Determinanten kennen gelernt:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Machen Sie sich zunächst noch ein Mal die Bedeutung der vorkommenden Symbole klar. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Beziehung folgende Eigenschaften der Determinante:

a) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

b) $\det(AB) = \det(BA)$

c) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

d) $\det A^T = \det A$

e) Im $\mathbb{R}^3$ gilt für die Matrix A mit Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\det A = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. (Damit ist die Determinante gleich dem von den Spaltenvektoren aufgespannten Spats eingeschlossenen Volumen, eine Eigenschaft, die in allen Dimensionen gilt.)

f) Warum verschwindet die Determinante von $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$?

3. Matrixdarstellung linearer Abbildungen *4 + 4 + 4 Punkte*

Diese Aufgabe ist eine Fortführung der Aufgabe 1 vom letzten Übungsblatt. Wir betrachten den 3-dimensionalen reellen Vektorraum V der Polynome 2. Grades über dem Intervall $[0,1]$. Das Skalarprodukt sei gegeben durch $(f,g) = \int_0^1 dx f(x)g(x)$. Skalarprodukte besitzen eine (basisabhängige) Matrixdarstellung S, mit der $(f,g) = \vec{f}^T S \vec{g}$ geschrieben werden kann. Die Norm einer Funktion $f \in V$ sei gegeben durch $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$. Es sei weiterhin das Polynom $h(x) = x^2 - x + 1$ gegeben.

a) Bestimmen Sie zunächst die Matrixdarstellung des Skalarproduktes bezüglich der Standardbasis $\{x^2, x, 1\}$. Finden Sie nun die Darstellung von h in dieser Basis und normieren sie h.

b) Überzeugen Sie sich davon, dass bezüglich der Orthonormalbasis $\{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$ das Skalarprodukt durch die Einheitsmatrix beschrieben wird und normieren Sie nun h in dieser Basis.

c) Wir betrachten die Abbildung $D : V \to V$, die jedem $f \in V$ seine Ableitung $f' \in V$ zuordnet. Begründen Sie zunächst, dass D eine lineare Abbildung von V ist. Bestimmen Sie dann die Matrixdarstellung von D sowohl bezüglich der Standardbasis $\{x^2, x, 1\}$ als auch bezüglich der Orthonormalbasis $\{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$. (Hinweis: Offenbar kann für D ebenso gut das Symbol ∂_x benutzt werden.)

4. Lineare Gleichungssysteme *4 + 4 Punkte*

a) Gegeben Sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte der Parameter a und b besitzt dieses Gleichungssystem (i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung und (iii) unendlich viele Lösungen?

b) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$