Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl

Mathematische Methoden der Physik
Übung 3

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreiben Sie auf Ihre abzugebenden Blätter stets auf die erste Seite groß ihren Namen und die Nummer ihrer Übungsgruppe. Danke.

Internetseite: http://www.thp.uni-koeln.de/∼as/mathmeth07.html/ *Hinweis: Zu dieser Vorlesung wurde ein Internetforum eingerichtet unter* http://www.ph1.uni-koeln.de/bama/forum/ *in welchem Fragen zu Klausur und Übungsbetrieb von uns geklärt werden sollen. Zudem gibt es nun eine offizielle Sprechstunde zu den Übungen Mittwochs 14-15h bei Andreas Hackl, Zimmer 110 Institut für theoretische Physik.*

1. Cosinussatz und Sinussatz *10 Punkte*

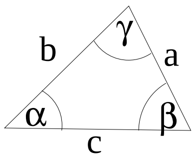
In Dreiecken gelten allgemeine Beziehungen zwischen Winkeln und Seitenlängen. Der Cosinussatz besagt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$$

und der Sinussatz lautet

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}\,,$$

wobei Längen und Winkel wie in der Skizze. Beweisen Sie diese zwei Sätze mittels analytischer Vektorrechnung. [Hinweise: Zum Beweis des Cosinussatzes betrachte geeignete Kantenvektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ mit $\underline{a} - \underline{b} = \underline{c}$. Für den Beweis des Sinussatzes ist es hilfreich die Fläche des Dreiecks jeweils durch die Vektorprodukte $\underline{b} \times \underline{c}$, $\underline{a} \times \underline{c}$, oder $\underline{b} \times \underline{a}$ darzustellen.]



2. Ableitung vektorwertiger Funktionen *10 Punkte*

a) Gegeben seien zwei Vektoren $\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t^2 \\ t(1-t) \end{pmatrix}$ und $\underline{b}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ -1 \\ 2t^2-1) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Ableitungen der Ausdrücke

$$\tfrac{d}{dt}\langle\underline{a},\underline{b}\rangle,\ \tfrac{d}{dt}(\underline{a}\times\underline{b}),\ \tfrac{d}{dt}|\underline{a}+\underline{b}|,\ \tfrac{d}{dt}(\underline{a}\times\tfrac{d\underline{a}}{dt})$$

b) Zeigen Sie: Für eine beliebige vektorwertige Funktion $\underline{a}(t)$ gilt die Beziehung

$$\langle\underline{a},\frac{d\underline{a}}{dt}\rangle = |\underline{a}|\frac{d|\underline{a}|}{dt}$$

(Die Zeitargumente wurden hier aus Bequemlichkeit weggelassen.)

3. Bahnen *10 Punkte*

a) Die Bahn eines Punktteilchen sei durch den zeitabhängigen Ortsvektor (bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems)

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\,\omega t \\ R\sin\,\omega t \\ v_0 t \end{pmatrix}$$

gegeben. Hierbei seien R eine Länge, ω eine Winkelgeschwindigkeit und v_0 habe die Dimension Geschwindigkeit. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ und die Beschleunigung $\underline{a}(t)$. Zeigen Sie, dass die Beträge von $\underline{v}(t)$ und $\underline{a}(t)$ zeitlich konstant sind. Skizzieren Sie die Bahn und zeichnen Sie für einen Zeitpunkt t_0 die Richtungsvektoren von $\underline{v}(t_0)$ und $\underline{a}(t_0)$ ein. Um was für eine Bahn handelt es sich? Wie läßt sie sich in zwei elementare Bahntypen zerlegen?

b) Wir betrachten nun eine Kreisbewegung in einer Ebene parallel zur $\underline{e}_1\underline{e}_2$ Ebene. Die Bahn sei

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\,\omega t \\ R\sin\,\omega t \\ z \end{pmatrix},$$

wobei R und z konstante Längen und ω wieder eine Winkelgeschwindigkeit sei. Ein Winkelgeschwindigkeitsvektor $\underline{\omega}$ sei durch $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_3$ definiert. Zeigen Sie folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \underline{v}(t) &= \underline{\omega} \times \underline{r}(t) & (1)\\ \underline{a}(t) &= \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}(t)) & (2)\\ |\underline{a}(t)| &= \omega^2\,|\underline{r}_\perp(t)|\,, & (3) \end{aligned}$$

wobei $\underline{r}_\perp(t)$ die senkrechte Komponente von $\underline{r}(t)$ zu $\underline{\omega}$ bezeichne.

4. Rollendes Rad *10+3 Punkte*

Ein Rad des Durchmessers R rollt mit konstanter Geschwindigkeit (des Radmittelpunktes) $\underline{v} = v_0\underline{e}_1$ auf einer Ebene. Wir betrachten einen auf den Umfang des Rades befestigten Punkt P. Geben Sie eine Parametrisierung $\underline{r}(t)$ der Bahn dieses Punktes bzgl. eines ortsfesten Koordinatensystems an und bestimmen Sie seine Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ und Beschleunigung $\underline{a}(t)$. Wann ist der Betrag der Geschwindigkeit minimal bzw. maximal? Ist der Betrag der Beschleunigung konstant?
Zusatzaufgabe (*+3 Bonuspunkte*): Skizzieren Sie die Bahnkurve von P!