Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl

Mathematische Methoden der Physik
Übung 4

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreiben Sie stets Namen und Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Internetseite: `http://www.thp.uni-koeln.de/~as/mathmeth07.html`

Diskussionsforum: `http://zeus.ph1.uni-koeln.de/bama/forum`

Die letzten Übungen haben ergeben, das einige der Vorlesungsteilnehmer zwar ihre Aufgaben abgeben, aber nie zu den Übungen erscheinen. Die Übungsgruppen dienen wesentlich zum Verständnis des Stoffes und zudem zur Überprüfung, ob Sie ausreichend Kenntnisse besitzen, um an der Klausur teilnehmen zu können. Beachten Sie daher, dass eine erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb auch die regelmässige Anwesenheit bei den Übungen voraussetzt, ansonsten kann keine Zulassung zur Klausur erfolgen.

1. Komplexe Zahlen anschaulich

2+2+2+2+2 Punkte

a) Skizzieren Sie die Mengen
(i) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$,
(ii) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < |\operatorname{Im} z|\}$.

b) Erklären und skizzieren Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel $\exp(i\phi) = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ die geometrische Deutung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen. Dabei dürfen Sie die geometrische Definition der trigonometrischen Funktionen verwenden. Bestimmen Sie geometrisch (ohne zu rechnen) das Ergebnis von $(1 + i^2) + (1 - i)^2$.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + bz + c = 0$, wobei b und c reell sind. Wieviele Lösungen gibt es und wo liegen diese in der komplexen Ebene?

d) Zeigen Sie geometrisch, dass die Summe über die n-ten Einheitswurzeln verschwindet.

e) Beweisen Sie für beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2 die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Wann gilt Gleichheit? Was bedeutet diese Gleichung geometrisch?
Tipp: Verwenden Sie in einem Zwischenschritt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|$ für geeignet gewählte zweidimensionale Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$.

2. Rechnen mit komplexen Zahlen

2+3+2+2+3+3 Punkte

a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von $z = x + iy$ wie folgt erhalten werden können:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + z^\star}{2} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - z^\star}{2i}.$$

b) Berechnen Sie $(2 + 2i)^2 + (2 - 2i)^2$ und $\frac{(-2+3i)^2}{4-4i}$.

c) Bestimmen Sie für $z = 1 + \sqrt{3}i$ die reellen Zahlen a und ϕ so, dass $z = a\exp(i\phi)$.

d) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^5 = -1$.

e) Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen $z_k = x_k + iy_k$ mit $k = 1, 2$. Zeigen Sie, dass

$$(z_1 \cdot z_2)^\star = z_1^\star z_2^\star, \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^\star = \frac{z_1^\star}{z_2^\star}, \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

f) Leiten Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

für Sinus und Cosinus her.
Tipp: Fangen Sie auf der rechten Seite an!

3. Krummlinige Koordinaten

4+3+3+5 Punkte

In der Vorlesung haben wir Zylinder- und Kugelkoordinaten kennengelernt. Deren Basisvektoren kann man im üblichen kartesischen System angeben. Für die Zylinderkoordinaten sind sie durch

$$\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben und durch

$$\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

im Fall der Kugelkoordinaten.

a) Zerlegen Sie die Basisvektoren der kartesischen Vektoren jeweils in ihre Komponenten bzgl. Zylinder- und Kugelkoordinaten, d.h. drücken Sie $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$ durch $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\phi$, $\underline{e}_z$ bzw. $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_\phi$ aus.

b) Zeigen Sie, dass die Basisvektoren $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\phi$, $\underline{e}_z$ bzw. $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_\phi$ jeweils paarweise senkrecht stehen.

Wir betrachten nun den Fall, dass die Parameter der Basisvektoren von Zylinderkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten zeitabhängig sind, d.h. Funktionen $r(t)$, $\phi(t)$, $z(t)$ bzw. $\theta(t)$, $\phi(t)$, $r(t)$.

c) Machen Sie sich klar, dass die Basisvektoren von Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten auch dann auf 1 normiert sind: $\underline{e}_i(t) \cdot \underline{e}_i(t) = 1$. Zeigen Sie anhand dieser Eigenschaft, dass die zeitliche Ableitung eines Basisvektors stets senkrecht auf dem Basisvektor steht.

d) Bestimmen Sie nun die zeitliche Ableitung der Basisvektoren der Zylinderkoordinaten unter Annahme der oben erwähnten zeitabhängigen Parameter. Zerlegen Sie die dadurch erhaltenen Vektoren in die Vektorkomponenten der zugehörigen Basis. Bonusaufgabe: Führen Sie diese Zerlegung auch für die Kugelkoordinaten durch. `(5 Bonuspunkte)`

4. Parametrisierung von Körpern

2+3 Punkte

a) Betrachten Sie den Vektor $\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = r \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Was für einen Körper beschreibt die Parameterschar $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\phi \in (0, 2\pi)$, $r \in (0, R)$?
Welchen Körper erhält man für $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in (0, \pi)$, $r \in (0, R)$?

b) Betrachten Sie einen Zylinder der Höhe h und mit Radius r. Nehmen Sie an, dass der Zylinder senkrecht und radialsymmetrisch in der $x - y$-Ebene steht. Konstruieren Sie nun wie in a) eine Parameterschar von Punkten, die diesen Körper beschreibt. Verwenden Sie dazu Zylinderkoordinaten.