Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl

Mathematische Methoden der Physik
Übung 6

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreiben Sie stets Namen und Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Internetseite: `http://www.thp.uni-koeln.de/~as/mathmeth07.html`

Diskussionsforum: `http://zeus.ph1.uni-koeln.de/bama/forum`

Nutzen Sie für Fragen und Kommentare zur Übung und Vorlesung auch das Internetforum. Dort werden unter anderem auch Fehler in den Angaben der Übungsblätter diskutiert.

1. Taylor-Entwicklung und Potenzreihen (=Aufg. 4a, Blatt 5) *4+2 Punkte*

Als Beispiel dafür, wie man durch geeignete Verknüpfung bekannter Potenzreihen ohne explizite Benutzung der Taylor-Formel Potenzreihen bestimmen kann, betrachten wir die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Diese soll unter Benutzung der aus der Vorlesung bekannten Potenzreihen von $\exp(y)$ und $\ln(1+y)$ bis auf einen Fehler $\mathcal{O}(x^5)$, also bis zur 4. Ordnung, entwickelt werden.

a) Stellen Sie $f(x)$ in der Form $f(x) = \exp(g(x))$ dar. Setzen Sie dann die Entwicklung der Funktion $g(x)$ in die Potenzreihe der Exponentialfunktion ein, um die Entwicklung von $f(x)$ zu bestimmen.Überlegen Sie vorher, bis zu welcher Ordnung die jeweiligen Entwicklungen tatsächlich benötigt werden!

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch explizite Bestimmung der zugehörigen Taylorentwicklung.

2. Logarithmen *4+3 Punkte*

a) Bestimmen Sie den Zusammenhang der Funktion $\log_a(x)$ mit dem natürlichen Logarithmus $\ln(x)$, indem Sie die Identität $x = a^{\log_a(x)}$ geeignet umformulieren. Berechnen Sie nun die Konstante M in der Beziehung $\log_a(x) = M \log_b(x)$. Formulieren Sie nun die Summe $\log_a(x)+\log_b(y)$ in einen Term der Form $\log_c(f(x,y))$ um, wobei c und $f(x,y)$ zu bestimmen sind.

b) Differenzieren Sie die Funktionen $\log_a(x)$ und $\log_a(\log_a(x^2))$ nach x.

3. Partielle Ableitungen *3+3+2 Punkte*

Es sei $\underline{r} = (x, y, z)$. Für die partielle Ableitung benutzen wir im Folgenden die häufig verwendete Kurzschreibweise $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ etc. Dabei seien $\underline{p}$ und $\underline{v}$ konstante Vektoren.

a) Bestimmen Sie $\partial_i \left(\frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}\right)$, $\qquad (i = x, y, z)$.

Tipp: Überlegen Sie, dass es aus Symmetriegründen nicht notwendig ist, alle drei Ableitungen explizit auszurechen!

b) Bestimmen Sie $\partial_i(\underline{v} \times \underline{r})$, $\qquad (i = x, y, z)$.

c) Bestimmen Sie die Ableitungen ∂_x und ∂_y von $\exp(x \cdot \cos(y))$.

4. Integration

6+3 Punkte

a) Berechnen Sie das Integral $a^{-1}\int_{-a}^{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}dx, a > 0$, auf drei Weisen:

(i) Führen Sie das Integral durch eine geeignete Substitution auf das Integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)dx$ zurück. Berechnen Sie dieses einmal 'direkt' durch partielle Integration, und

(ii) 'indirekt' mithilfe der Identität $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, der Periodizitätseigenschafen der trigonometrischen Funktionen, sowie der bekannten Stammfunktion der konstanten Funktion.

(iii) Identifizieren Sie den Wert des Integrals durch eine geeignete Substitution mit einer einfachen geometrischen Fläche.

b) Berechnen Sie $\frac{d}{dy}\int_{0}^{1}\arctan(\frac{x}{y})dx$. Differenzieren Sie hierzu unter dem Integral.

5. Präsenzübung

Besprechung von alten Übungsaufgaben, die bisher aus Zeitgründen nicht möglich war!