Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl

Mathematische Methoden der Physik
Übung 7

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreiben Sie stets Namen und Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Internetseite: `http://www.thp.uni-koeln.de/∼as/mathmeth07.html`

Diskussionsforum: `http://zeus.ph1.uni-koeln.de/bama/forum`

Nutzen Sie für Fragen und Kommentare zur Übung und Vorlesung auch das Internetforum.

Die **Probleklausur** findet am 13.12.07 in der Zeit von 14:00 bis 16:00 Uhr in Hörsaal 1 statt. Die dort erreichten Punkte zählen mit für die Zulassung zur Abschlußklausur. Die genaue Regelung wird noch in der Vorlesung und im Forum bekannt gegeben.

1. Graphische Lösung von Differentialgleichungen *7+5 Punkte*

a) Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = -x/y$. Klassifizieren Sie zunächst diese Gleichung!

Wir wollen die DGL nun graphisch "lösen". Die Lösung mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ bezeichnen wir dabei mit $y_{x_0,y_0}(x)$. Die Steigung des Graphen dieser Lösung im Punkt (x_0, y_0) ist dann offensichtlich durch $y'_{x_0,y_0}(x) = -x_0/y_0$ gegeben. Somit kann man die Tangente an die Lösungsfunktion in (x_0, y_0) einzeichnen. Der Graph der Lösungsfunktion kann nun entlang dieser Tangente extrapoliert werden, bis sich das Verhältnis $-x/y$ zu sehr verändert hat. Zeichnen Sie dann eine neue Tangente an einem geeigneten Punkt (x_1, y_1) ein. Wenn Sie dies für genügend viele Punkte getan haben, sollten Sie in der Lage sein, die Lösung qualitativ zu beschreiben.

Führen Sie dieses Verfahren für obige DGL mit der Anfangsbedingung $(x_0 = 0, y_0 = 1)$ explizit durch.

Bem.: Allgemein können wir für eine DGL $y' = f(x, y)$ die Tangentensteigung einer Lösungsfunktion $y(x)$, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht, sofort aus der DGL ablesen (nämlich $f(x_1, y_1)$). Man kann dann das sog. *Richtungsfeld* konstruieren, indem man in jedem Punkt eine Gerade mit der entsprechenden Tangentensteigung abträgt. Das oben beschriebene Verfahren konstruiert einen Teil des Richtungsfeldes, nämlich den für eine spezielle Anfangsbedingung.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung aus Teilaufgabe a) durch Trennung der Variablen. Sind Ihre Resultate konsistent?

2. Lineare Differentialgleichungen *6+6 Punkte*

a) Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$, wobei γ und ω^2 positive Konstanten sind. Betrachten Sie im folgenden die beiden Fälle $\omega = \sqrt{5}, \gamma = 1$ und $\omega = 1, \gamma = \sqrt{5}$. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung durch einen Exponentialansatz und diskutieren Sie die Lösung. Was für ein physikalisches System wird durch diese Differentialgleichung beschrieben?

b) Radioaktive Kerne zerfallen nach dem Gesetz

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

wobei $N(t)$ die Anzahl der Kerne zur Zeit t ist und $\lambda > 0$ die Zerfallskonstante. In einer radioaktiven Zerfallsreihe $1 \to 2 \to \ldots \to n$ von n verschiedenen Kernen (mit Anzahl $N_1, N_2, \ldots, N_n$) gilt dann, beginnend mit N_1,

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1\,, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2\,, \end{aligned}$$

und so weiter. Die zweite Gleichung berücksichtigt, dass die Zahl N_2 der Kerne vom Typ 2 durch die Zahl N_1 der zerfallenen Kerne vom Typ 1 anwächst. Daher geht die Zerfallsrate von N_1 mit umgekehrtem Vorzeichen in die Zerfallsgleichung für N_2 ein.

Wir betrachten nun den Fall von nur zwei verschiedene Kernen, d.h. $n = 2$. Bestimmen Sie dann $N_2(t)$ mit den Anfangsbedingungen $N_1(0) = N_0$ und $N_2(0) = 0$.

3. Inhomogene Differentialgleichungen *4+7 Punkte*

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'(x) = -y/x$$

durch Trennung der Veränderlichen.

b) Ermitteln Sie nun die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'(x) = 3x - y/x$$

durch *Variation der Konstanten*. Ersetzen Sie dazu die Integrationskonstante C der allgemeinen Lösung, die Sie in Teil a) bestimmt haben, durch eine (noch unbekannte) Funktion $C(x)$. Indem man die so erhaltene Funktion in die inhomogene DGL einsetzt, erhält man eine neue DGL für $C(x)$. Lösen Sie diese und überzeugen Sie sich, dass Sie wirklich eine (spezielle) Lösung der inhomogenen DGL gefunden haben.

4. Präsenzübung

Besprechung von aus Zeitgründen bisher nicht diskutierten alten Übungsaufgaben.