Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl

Mathematische Methoden der Physik
Übung 8

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreibe Sie stets Ihren Namen sowie Ihre Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Internetseite: `http://www.thp.uni-koeln.de/~as/mathmeth07.html`

Diskussionsforum: `http://zeus.ph1.uni-koeln.de/bama/forum`

Hinweise:
1) In der nächsten Woche wird es statt der Gruppenübungen eine Globalübung geben, die am Donnerstag (13.12.) in der Zeit von 12:00 - 13:00 Uhr in Hörsaal 2 stattfindet (statt Vorlesung!). Wir empfehlen dringend, an dieser Übung teilzunehmen!!!

2) Die Probeklausur zählt mit zu den Zulassungsvoraussetzungen für die Abschlußklausur. Eine genaue Beschreibung der Punkteregelung finden Sie im Forum.

1. Vektoranalysis

7+6+4+5+4 Punkte

a) Gegeben seien das Skalarfeld $f(\vec{r}) = x^2y/z$ sowie das Vektorfeld $v(\vec{r}) = (xy, yz, zx)$. Wenden Sie hierauf alle Differentialoperatoren (Gradient, Rotation, Divergenz und Laplaceoperator) an, die Sinn machen.

b) Sei $f : \mathbb{R}^3/\{0\}, \vec{r} \mapsto f(r)$ ein radialsymmetrisches Skalarfeld, d.h. der Wert von f hängt nur von $r = |\vec{r}|$ ab. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\vec{e}_r$$

wobei $\vec{e}_r := \hat{r} := \frac{\vec{r}}{r}$ der radiale Einheitsvektor ist.
Skizzieren Sie $\vec{v} := \operatorname{grad} f$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{div} \vec{v} = f'' + 2f'/r$$

und berechnen Sie rot $\vec{v}$.

c) Berechnen Sie die Divergenzen $\operatorname{div}(r\vec{a})$ und $\operatorname{div}\left(r \operatorname{grad}(\frac{1}{r^3})\right)$.

d) Zeigen Sie, dass für beliebige Skalarfelder $f(\vec{r})$ bzw. Vektorfelder $\vec{F}(\vec{r})$ gilt:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0\,.$$

Hätten Sie sich mit diesen Identitäten in den Teilaufgaben (a) und (b) Arbeit sparen können?

e) Bestimmen Sie das Gradientenfeld von $\phi(x, y, z) = x \sin(yz)$. Skizzieren Sie die Projektion in die x-y Ebene, indem Sie entsprechende Vektoren an konzentrischen Kreisen einzeichnen. Berechnen Sie nun die Divergenz dieses Gradientenfeldes.

2. Wegintegral I *7 Punkte*

Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} xy \\ 2x \\ y+z \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das Integral über den Weg $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ mit $t \,\varepsilon\, [0,1]$.

b) Berechnen Sie das Integral nun über den Weg $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t^2 \end{pmatrix}$ mit $t \,\varepsilon\, [0,1]$.

3. Wegintegral II *7 Punkte*

Gegeben ist nun das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 1-xy \\ 2y^2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das Wegintegral über den Viertelkreisbogen von (1,1) nach $(-1,1)$.

b) Berechnen Sie das Wegintegral nun über die Verbindungsgerade von (1,1) mit $(-1,1)$.