Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl, P. Jung

Mathematische Methoden der Physik
Übung 13

Wintersemester 2007/2008

1. Eigenwerte

Die Matrix

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt Drehungen um die z-Achse um den Winkel ϕ.

a) Zeigen Sie, dass $M(\phi)$ eine orthogonale Matrix ist, und dass $(M(\phi))^{-1} = M(-\phi)$ ist.

Die Orthogonalität kann man direkt nachrechnen:

$$\begin{aligned} (M(\phi))^T M(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\phi + \sin^2\phi & -\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi & 0 \\ -\sin\phi\cos\phi + \cos\phi\sin\phi & (-\sin\phi)^2 + \cos^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog folgt $M(\phi)\,(M(\phi))^T = \mathbb{1}$. Dies muss man aber nicht separat überprüfen, denn $(M(\phi))^T = M(-\phi)$, wobei ausgenutzt wurde, dass der Sinus eine ungerade Funktion ist. Somit gilt

$$M(\phi)\,(M(\phi))^T = (M(-\phi))^T\, M(-\phi) = \mathbb{1}\,,$$

da die gerade bewiesene Identität für alle ϕ gilt. Damit ist $(M(\phi))^{-1} = (M(\phi))^T$ und somit $(M(\phi))^{-1} = M(-\phi)$.

b) Bestimmen Sie $\det M(\phi)$.

Durch Entwicklung nach der letzten Zeile folgt:

$$\det M(\phi) = 0 + 0 + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1.$$

c) Zeigen Sie, dass für beliebige Matrizen $A \in \mathcal{M}(m,k)$ und $B \in \mathcal{M}(k,n)$ gilt: $(AB)^T = B^T A^T$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left((AB)^T\right)_{ij} &= \left(\left(\sum_{l=1}^{k} a_{ik} b_{kj}\right)^T\right)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{jk} b_{ki} = \sum_{l=1}^{k} (A^T)_{kj} (B^T)_{ik} = \sum_{l=1}^{k} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} \\ &= B^T A^T. \end{aligned}$$

d) Machen Sie sich klar, dass man das (Standard-)Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ auch als Matrixmultiplikation $\vec{a}^T \vec{b}$ interpretieren kann!

Wir machen uns das im $\mathbb{R}^3$ klar:

$$\text{Standard-Skalarprodukt:} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

$$\text{Matrixmultiplikation:} \qquad (a_1 \; a_2 \; a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Dabei ist ja das Produkt einer $1 \times n$ mit einer $n \times 1$-Matrix eine 1×1-Matrix, also eine Zahl.

e) Wir betrachten einen beliebigen Punkt $\vec{r}$ im $\mathbb{R}^3$ und den zugehörigen Bildvektor $\vec{r'} = M(\phi)\vec{r}$. Zeigen Sie, dass beide den gleichen Betrag haben, d.h., dass gilt: $\vec{r'} \cdot \vec{r'} = \vec{r} \cdot \vec{r}$. Interpretieren Sie das Ergebnis!
Hinweis: Verwenden Sie die Resultate aus a), c) und d).

Es gilt:

$$\vec{r'} \cdot \vec{r'} = \left(\vec{r'}\right)^T \vec{r'} = (M(\phi)\vec{r})^T M(\phi)\vec{r} = \left(\vec{r'}\right)^T (M(\phi))^T M(\phi)\vec{r} = \left(\vec{r'}\right)^T \mathbb{1}\, \vec{r} = \left(\vec{r'}\right)^T \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{r}.$$

Im ersten Schritt wurde d) verwendet, im dritten c). Danach wurde die Orthogonalität von M benutzt und schließlich wieder d).
Da sich die Länge beliebiger Vektoren nicht ändert, muss M eine (Dreh-)Spiegelung beschreiben.

f) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $M(\phi)$.

Durch Entwicklung nach der letzten Zeile erhält man:

$$\begin{aligned} P(\lambda) \quad &:= \quad \det\left(M(\phi) - \lambda \mathbb{1}\right) = \det \begin{pmatrix} \cos\phi - \lambda & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \quad (1-\lambda)\left((\cos\phi - \lambda)^2 + \sin^2\phi\right) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda\cos\phi + 1\right) \end{aligned}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ sind daher

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, \\ \lambda_\pm &= \cos\phi \pm \sqrt{\cos^2\phi - 1} = \cos\phi \pm i \sin\phi = e^{\pm i\phi}. \end{aligned}$$

g) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren!

Der Eigenvektor e_0 zu $\lambda_0 = 1$ ist offensichtlich durch $e_0 = (0,0,1)^T$ gegeben. Wie man leicht nachrecht, sind die beiden anderen (normierten) Eigenvektoren

$$e_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

h) Zeigen Sie explizit, dass die Eigenvektoren paarweise orthogonal sind!

e_0 ist offensichtlich orthogonal zu e_+ und e_-. Außerdem ist $e_+ \cdot e_- = 1 + \overline{(-i)}i + 0 = 0$. Hierbei ist zu beachten, dass das Komplex-Konjugierte des linken Vektors zu betrachten ist, gemäß der Definition des Skalarproduktes für Vektoren mit komplexen Komponenten.

i) Bestimme die Spektraldarstellung von $M(\phi)$.

Allgemein ist die Spektraldarstellung von der Form $(M)_{jm} = \sum_k \lambda_k (\vec{e}_k)_j (\overline{\vec{e}_k})_m$. Im vorliegenden Fall ergibt sich hiermit:

$$M = \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_+ \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2i & 0 \\ 1/2i & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_- \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i & 0 \\ -1/2i & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_0 = 1$ und $\lambda_\pm = e^{\pm i\phi}$, wie man leicht nachrechnet.