Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl

Mathematische Methoden der Physik
Lösungsvorschlag zur Präsenzübung ("Probeklausur")

Wintersemester 2007/2008

Lesen Sie die Aufgabenstellung **sorgfältig** durch. Die Aufgaben sind thematisch und nicht nach Schwierigkeit geordnet. Sie haben 120 min. Zeit. Es sind maximal 150 Punkte zu erreichen. Im "Ernstfall" hätten Sie mit 50 Punkten bestanden.
Bitte kreuzen Sie bearbeitete Aufgaben auf dem Deckblatt an. Außer Papier und Stift sind keine Hilfsmittel erlaubt! **Viel Erfolg!**

1. Quickies (keine Rechnung nötig!)

10 × 3 = 30 Punkte

Beantworten Sie folgende Fragen, ohne eine explizite Rechnung durchzuführen:

(i) Was ist $\log_{e^2}(e)$?
(ii) $\int_{-1}^{1} x(\cos x)^{13}(\sin x)^{148}dx = ?$ (mit Begründung!)
(iii) Mit welcher Funktion stimmt $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $|x| < 1$ überein?
(iv) Vereinfache $\left(x^a x^b\right)^c$!
(v) Drücken Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ und $|z|$ durch z und z^* aus!
(vi) Drücke $|\vec{a} \times \vec{b}|$ durch die Beträge von $\underline{a}$, $\underline{b}$ und den Winkel ϕ zwischen ihnen aus.
(vii) Welche Funktion wächst für $x \to \infty$ schneller: x^2, $\ln x$, $\exp(x)$, x^{129} ? Ordnen Sie die Funktionen nach ansteigender Wachstumsgeschwindigkeit!
(viii) Wie lautet der Zusammenhang zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten?
(ix) Wie lautet das totale Differential einer Funktion $f(x_1, x_2)$? Drücken Sie dieses auch durch den Gradienten von f aus!
(x) Welcher Ausdruck macht Sinn, falls f, g Skalarfelder und $\underline{A}, \underline{B}$ Vektorfelder sind?

$$\mathrm{grad}(\underline{A} \cdot \underline{B}), \quad \mathrm{rot}(f\, \mathrm{grad}\, g), \quad \mathrm{div}(\underline{A} \cdot \underline{B}), \quad \mathrm{rot}(f\, \mathrm{rot}\, g), \quad \mathrm{div}(f\underline{A}).$$

(i) Nach Vorlesung gilt $\log_a(b) = \ln(b)/\ln(a)$, also

$$\log_{e^2}(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(e^2)} = \frac{\ln(e)}{2\ln(e)} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Das Integrationsintervall $[-1, 1]$ ist symmetrisch bzgl. $x = 0$, während der Integrand eine ungerade Funktion von x ist, d.h. $f(-x) = -f(x)$ mit $f(x) \equiv x(\cos x)^{13}(\sin x)^{148}$. Damit folgt:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{1}^{-1} f(-x)\, d(-x) = -\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0.$$

(iii) Die dargestellte Reihe ist die geometrische Reihe,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für} \quad |x| < 1.$$

(iv) Mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Potenzgesetze vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$(x^a x^b)^x = (x^{a+b})^c = x^{c(a+b)}.$$

(v) Sei $z = x + iy$ eine beliebige komplexe Zahl. Mit $z^* = x - iy$ folgt:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i}, \quad |z| = \sqrt{zz^*}.$$

(vi) Nach Vorlesung gilt:

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin\phi \quad \text{mit} \quad \phi = \angle(\underline{a}, \underline{b}).$$

(vii) Es gelten folgende Abschätzungen für das Wachstum der Exponentialfunktion bzw. des Logarithmus (s. Vorlesung):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0.$$

und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}.$$

Mit anderen Worten: Die Exponentialfunktion wächst schneller, der Logarithmus aber langsamer als als jedes Monom x^n. Damit kann man folgende Abschätzung für das Wachstum treffen:

$$\ln(x) < x^2 < x^{129} < \exp(x) \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

(viii) Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten x, y, z und den Zylinderkoordinaten r, ϕ, z ist durch folgende Relationen gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan(x/y) \\ z \end{array}\right.$$

(ix) Das totale Differential der Funktion $f(x_1, x_2)$ lautet

$$df = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\, dx_2.$$

Mit Hilfe des Gradienten,

$$\mathrm{grad}\, f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \hat{\underline{e}}_i,$$

lässt sich das totale Differential auch schreiben (hier ist $n = 2$) als

$$df = \mathrm{grad}\, f \cdot d\underline{x} \quad \text{mit} \quad d\underline{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

(x) Seien f, g zwei Skalarfelder und $\underline{A}, \underline{B}$ zwei Vektorfelder, die hinreichend oft stetig differenzierbar seien. Dann sind folgende Ausdrücke wohldefiniert:

$$\mathrm{grad}(\underline{A} \cdot \underline{B}), \quad \mathrm{rot}(f\, \mathrm{grad}\, g), \quad \mathrm{div}(f\underline{A}).$$

Die anderen beiden Ausdrücke sind *nicht* wohldefiniert, da sowohl Rotation als auch Divergenz nur für Vektorfelder definiert sind und somit $\mathrm{rot}(f)$ und $\mathrm{div}(\underline{A} \cdot \underline{B})$ nicht gebildet werden können.

2. Vektorrechnung

6+2+5+6 = 19 Punkte

Gegeben seien die Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Skalar- und Vektorprodukt der beiden Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ und ihre Beträge $|\underline{a}|$, $|\underline{b}|$.

b) Finden Sie einen Vektor der senkrecht auf den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ steht.

c) Zerlegen Sie den Vektor $\underline{a}$ in seine Anteile normal und parallel zu dem Vektor $\underline{b}$.

d) Gegeben sei die Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ des Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die Menge von Vektoren $\mathcal{B}' = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ mit

$$\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_2 + \underline{e}_3), \quad \underline{f}_2 = -\underline{e}_1, \quad \underline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$$

ebenfalls eine Orthonormalbasis von V ist.

---

a) Skalarprodukt und Vektorprodukt von $\underline{a}, \underline{b}$ ergeben sich zu

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 1, \quad \underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Beträge der beiden Vektoren erhält man

$$|\underline{a}| = \sqrt{2}, \quad |\underline{b}| = \sqrt{14}.$$

b) Aus den Eigenschaften des Vektorproduktes folgt, dass $\underline{c} \equiv \underline{a} \times \underline{b}$ (wie in a) berechnet!) senkrecht zu den beiden Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ist. Also:

$$\lambda \underline{c} \perp \underline{a}, \underline{b} \quad \text{für alle } \lambda \neq 0.$$

c) Gesucht ist die Zerlegung $\underline{a} = \underline{a}_\parallel + \underline{a}_\perp$ in Parallel- und Normalkomponenten bzgl. $\underline{b}$. Nach Vorlesung gilt:

$$\underline{a}_\parallel = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2} \underline{b} \quad \text{und} \quad \underline{a}_\perp = \underline{a} - \underline{a}_\parallel.$$

Einsetzen von $\underline{a}, \underline{b}$ ergibt:

$$\underline{a}_\parallel = \frac{1}{14} \underline{b} = \begin{pmatrix} 3/14 \\ -1/14 \\ 1/7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{a}_\perp = \underline{a} - \frac{1}{14} \underline{b} = \begin{pmatrix} 11/14 \\ 1/14 \\ -8/7 \end{pmatrix}.$$

d) Gegeben ist die Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ von V, d.h. es gilt

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}.$$

Zu zeigen ist, dass $\mathcal{B}' = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ ebenfalls eine Orthonormalbasis von V ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass

$$\underline{f}_i \cdot \underline{f}_j = \delta_{ij},$$

denn hieraus folgt die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\underline{f}_i$. Hierzu:

$$\begin{aligned}
\underline{f}_1 \cdot \underline{f}_2 &= \frac{-1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1) = 0, \\
\underline{f}_1 \cdot \underline{f}_3 &= \frac{1}{2}(-\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 - \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_3) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0, \\
\underline{f}_2 \cdot \underline{f}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 - \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3) = 0, \\
\underline{f}_1 \cdot \underline{f}_1 &= \frac{1}{2}(\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 + 2\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_3) = \frac{1}{2}(1+1) = 1, \\
\underline{f}_2 \cdot \underline{f}_2 &= \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 = 1, \\
\underline{f}_3 \cdot \underline{f}_3 &= \frac{1}{2}(\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 - 2\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_3) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.
\end{aligned}$$

Damit ist $\underline{f}_i \cdot \underline{f}_j = \delta_{ij}$, und die Behauptung ist bewiesen.

3. Komplexe Zahlen

6+4+6 = 16 Punkte

a) Bestimmen Sie für die Zahlen $(1+i)^{10}$ und $(1-i)^{10}$ Betrag und Argument. Zeichnen Sie anschließend diese Zahlen in die komplexe Ebene ein.

b) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $z^2 - 6z + 13 = 0$.

c) Beweisen Sie unter Verwendung der Eulerschen Formel folgende Relation:

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos x).$$

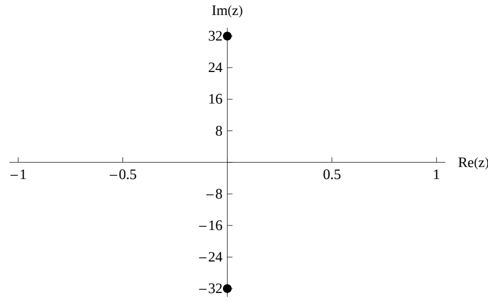
---

a) Seien $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i = z_1^*$. In Polarkoordinaten lassen sich $z_{1,2}$ darstellen als

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \quad z_2 = z_1^* = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Dann folgt leicht:

$$\begin{aligned}
z_1^{10} &= (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{10} = 2^{10/2}e^{10(i\pi/4)} = 32e^{i\pi/2} = 32i, \\
z_2^{10} &= (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^{10} = 2^{10/2}e^{10(-i\pi/4)} = 32e^{-i\pi/2} = -32i.
\end{aligned}$$



b) Die quadratische Gleichung $z^2 - 6z + 13 = 0$ lässt sich leicht durch quadratisches Ergänzen lösen. Die Nullstellen der Gleichung sind

$$z_{1,2} = 3 \pm 2i \quad \text{mit} \quad z_1 = z_2^*.$$

c) Nach der Eulerschen Formel gilt:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Damit folgt dann:

$$\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{ix}-2+e^{-ix}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos x)\,.$$

4. Differenzieren

6+8+4+4 = 22 Punkte

a) Berechnen Sie die Ableitungen

$$\frac{d}{dx}\cos(e^x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y}(y+z)^x.$$

b) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\frac{\pi}{x^2+1})$ auf folgende Gesichtspunkte:

(i) Bestimmen Sie die Grenzwerte $x \to 0$ und $x \to \infty$.
(ii) Bestimmen Sie den Wertebereich von des Terms $\frac{\pi}{x^2+1}$ und der Funktion f.
(iii) An welchen Stellen nimmt f den Wert 0 bzw. 1 an?
(iv) Skizzieren Sie nun die Funktion.

c) Berechnen Sie die Zeitableitung von

$$\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t^2 + \sqrt{t} \end{pmatrix}.$$

d) Es sei $\underline{e}(t)$ ein zeitabhängiger Einheitsvektor, $\mid \underline{e}(t) \mid= 1$ für alle t.
Zeigen Sie: $\frac{d}{dt}\underline{e}(t) \perp \underline{e}$, d.h. $\dot{\underline{e}}(t)$ steht immer senkrecht auf $\underline{e}(t)$.

a) Mit Hilfe der Kettenregel folgt:

$$\frac{d}{dx}\cos(e^x) = -\sin(e^x)e^x$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y}(y+z)^x = x(y-z)^{x-1}.$$

b)

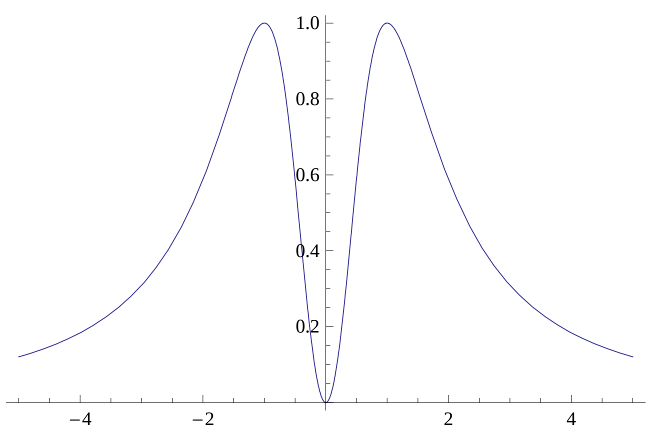
(i) Die Grenzwerte sind

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) = \sin(\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right) = \sin(0) = 0.$$

(ii) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\frac{\pi}{x^2+1} \in (0,\pi]$ und damit $f(x) \in [0,1]$.

(iii) Aus $\sin(k\pi) = 0$ und $\sin((2k+1/2)\pi) = 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $\frac{\pi}{x^2+1} \in (0,\pi]$ folgt, dass $f(x) = 0$ bei $x = 0$ und bei $x = \pm\infty$ und dass $f(x) = 1$ bei $x = \pm 1$.
Da $f(x) \in [0,1]$ nach b), sind dies auch die Extrema der Funktion f.

(iv) Skizze:



c) Komponentenweises Differenzieren nach der Zeit liefert

$$\frac{d}{dt}\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2t + 1/(2\sqrt{t}) \end{pmatrix}.$$

d) Da $\underline{e}(t)$ normiert ist, folgt leicht:

$$0 = \frac{d}{dt}\,|\underline{e}(t)|^2 = \frac{d}{dt}\left(\underline{e}(t)\cdot\underline{e}(t)\right) = 2\left(\frac{d}{dt}\underline{e}(t)\right)\cdot\underline{e}(t) = 2\underline{\dot{e}}(t)\cdot\underline{e}(t),$$

d.h. $\frac{d}{dt}\underline{e}(t) \perp \underline{e}(t)$.

5. Integrieren

10+7 = 17 Punkte

a) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx \quad \text{und} \quad \frac{d}{da}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{ax+1}}\,dx.$$

b) Bestimmen Sie $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ mit Hilfe der Substitution $x = \sin y$.

---

a) Das erste Integral lässt sich mittels partieller Integration lösen:

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x})\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1.$$

Zur Berechnung des zweiten Integrals substituieren wir zuerst $y = ax$ und integrieren dann elementar:

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{ax+1}}\,dx &= \frac{d}{da}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{y+1}}\frac{dy}{a} = \frac{d}{da}\left(\frac{2}{a}\left[\sqrt{y+1}\right]_0^a\right)\\ &= \frac{d}{da}\left(\frac{2}{a}\sqrt{a+1}-\frac{2}{a}\right) = -\frac{2}{a^2}\sqrt{a+1}+\frac{1}{a\sqrt{a+1}}+\frac{2}{a^2}.\end{aligned}$$

Alternativ kann man erst die Ableitung unter das Integral ziehen und partiell integrieren:

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{ax+1}}\,dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{ax+1}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{(ax+1)^{3/2}}\,dx = \int_0^1 x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a\sqrt{ax+1}}\right)dx\\ &= \left[\frac{x}{a\sqrt{ax+1}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{a\sqrt{ax+1}}\,dx = \frac{1}{a\sqrt{a+1}} - \left[\frac{2}{a^2}\sqrt{ax+1}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{a\sqrt{a+1}} - \frac{2}{a^2}(\sqrt{a+1}-1)\,.\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der Substitution $x = \sin y$ erhalten wir:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\cos y}\cos y\,dy = \int dy = y + C,$$

wobei C eine beliebige Integrationskonstante ist. Aus der Substitution $x = \sin y$ folgt $y = \arcsin x$, also

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C.$$

6. Potenzreihen und Taylorentwicklung

8+8 = 16 Punkte

a) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von $\sin(x)$ um $x = 0$ (mit Rechnung!).

b) Geben Sie die Potenzreihendarstellung von $[\sin(x)]^2$ um $x = 0$ bis auf ein Restglied von $\mathcal{O}(x^5)$ an. Setzen Sie hierzu die Taylorentwicklung von $\sin(x)$ ein.

---

a) Die Taylor-Reihe einer Funktion $f(x)$ um x_0 ist definiert durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x_0).$$

Hier ist $f(x) = \sin x$ und $x_0 = 0$. Die Ableitungen des Sinus sind gegeben durch

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \begin{cases} \sin x & \text{für } n = 0 \mod 4 \quad (\text{d.h. } n = 0, 4, 8, \cdots) \\ \cos x & \text{für } n = 1 \mod 4 \quad (\text{d.h. } n = 1, 5, 9, \cdots) \\ -\sin x & \text{für } n = 2 \mod 4 \quad (\text{d.h. } n = 2, 6, 9, \cdots) \\ -\cos x & \text{für } n = 3 \mod 4 \quad (\text{d.h. } n = 3, 7, 10, \cdots) \end{cases}$$

Wegen $\sin x_0 = 0$ und $\cos x_0 = 1$ brauchen wir nur die Ableitungen mit ungeradem n zu betrachten. Dann erhalten wir:

$$\sin(x) = \sum_{n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (-1)^{(n-1)/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

wobei wir im letzten Schritt $n = 2k+1$ eingesetzt haben. Offensichtlich ist die Taylor-Reihe gleich der Reihendarstellung des Sinus.

b) Aus Teil a) kennen wir die Entwicklung des Sinus um $x_0 = 0$ bis zur vorgegebenen Ordnung $\mathcal{O}(x^5)$:

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5).$$

Quadrieren dieser Entwicklung liefert die gesuchte Entwicklung von $[\sin(x)]^2$:

$$[\sin(x)]^2 \simeq \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \mathcal{O}(x^5) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^5).$$

7. Differentialgleichungen

2+6+8 = 16 Punkte

a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung $f''(x) + af(x) = 0$.

b) Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung $f''(x) + af(x) = 0$ mit $a > 0$.

c) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x) = -y^2$ durch Trennung der Veränderlichen.

---

a) Die Differentialgleichung $f''(x) + af(x) = 0$ ist eine gewöhnliche, homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

b) Zur Lösung der Differentialgleichung machen wir einen Exponentialansatz:

$$f(x) = Ce^{\lambda x},$$

wobei A und λ zu bestimmen sind. Da die Differentialgleichung linear ist, ist die triviale Lösung $f(x) \equiv 0$, d.h. $C = 0$, stets eine Lösung. Im folgenden sei daher $C \neq 0$ vorausgesetzt. Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung ergibt:

$$(\lambda^2 + a)f(x) = 0,$$

und wegen $f(x) \neq 0$ folgt

$$\lambda^2 + a = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{a}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$f(x) = C_1 e^{i\sqrt{a}x} + C_2 e^{-i\sqrt{a}x},$$

wobei die Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ durch die (hier nicht angegebenen) Anfangsbedingungen bestimmt sind.
Probe:

$$f''(x) + af(x) = (-aC_1 e^{i\sqrt{a}x} - aC_2 e^{-i\sqrt{a}x}) + af(x) = af(x) - af(x) = 0.$$

c) Die Differentialgleichung $y'(x) = -y^2$ löst man mittels Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \rightsquigarrow -\frac{dy}{y^2} = dx \rightsquigarrow \int \frac{-1}{y^2}\,dy = \int dx \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x+C}$$

mit einer beliebigen Konstante $C \in \mathbb{R}$.
Probe:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{x+C} = \frac{-1}{(x+C)^2} = -y^2.$$

8. Vektoranalysis

6+8 = 14 Punkte

a) Berechnen Sie $\operatorname{grad}(r^2)$ und $\operatorname{rot} \underline{r}$.

b) Der Luftdruck über Köln werde durch die Funktion $f(x, y, z) = \tanh(x + 2y)e^{-z^2}$ beschrieben. Bestimmen Sie im Punkt $\underline{r} = (0, 0, 1)$ die Richtung, in welcher der Luftdruck am stärksten ansteigt. Dabei ist $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x}$

---

a) Komponentenweise Differenzieren ergibt wegen $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$:

$$\frac{\partial r^2}{\partial x_i} = 2x_i,$$

also folgt

$$\operatorname{grad}(r^2) = 2\underline{r}.$$

Das gleiche Ergebnis folgt aus der bekannten Regel für die Ableitung von radialsymmetrischen Skalarfeldern $f(r)$.

Die Rotation von $\underline{r}$ verschwindet identisch,

$$\operatorname{rot}(\underline{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{grad}(r^2) \equiv \underline{0}.$$

Alternativ kann man dies natürlich auch mit der Definiton der Rotation direkt nachrechnen.

b) Die Richtung des Anstiegs bzw. Abfalls einer Funktion $f(\underline{r})$ ist durch ihren Gradienten gegeben. Für $f(\underline{r}) = f(x, y, z) = \tanh(x + 2y)e^{-z^2}$ lautet dieser:

$$\operatorname{grad} f(\underline{r}) = \begin{pmatrix} [\cosh(x+2y)]^{-2} e^{-z^2} \\ 2[\cosh(x+2y)]^{-2} e^{-z^2} \\ \tanh(x+2y)(-2z)e^{-z^2} \end{pmatrix}$$

Im Punkt $\underline{r} = (0, 0, 1)$ ist der Gradient

$$\operatorname{grad} f(\underline{r}) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ 2e^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In Richtung $(1, 2, 0)$ ist der Anstieg des Luftdrucks also am größten.