
Andreas Schadschneider

Mathematische Methoden der Physik

Version: 8. Februar 2008

Wintersemester 2007/08

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skript zu Vorlesung *Mathematische Methoden* ersetzt nicht den regelmässigen Besuch der Vorlesungen. Es ist als Ergänzung gedacht, zum Nacharbeiten oder zur Vorbereitung auf Klausuren und Prüfungen. Deshalb sollten alle Formeln und Aussagen immer kritisch betrachtet werden, es könnten noch Druckfehler enthalten sein!

Wesentlicher Bestandteil der Vorlesung *Mathematische Methoden* sind die Übungen. Gerade in den ersten Semestern ist es unbedingt erforderlich, den Stoff durch eigenständiges Bearbeiten von Übungsaufgaben zu vertiefen.

Ziel der Vorlesung und der dazu gehörigen Übungen ist die Vermittlung grundlegender mathematischer Techniken und Fähigkeiten, die zur Lösung physikalischer Aufgabenstellungen benötigt werden. Sie ergänzt die Vorlesung "Mathematik für Physiker". Im ersten Block werden die mathematischen Techniken und Methoden eingeführt, die zum Verständnis der Vorlesung "Experimentalphysik I" notwendig sind. Schwerpunkt des zweiten Blocks ist die Vorbereitung auf die Kursvorlesungen der Theoretischen Physik. Die meisten der hier vorgestellten Methoden sind nicht Gegenstand der Mathematikvorlesung.

Wesentliches Ziel der Vorlesung ist die praktische Beherrschung der vorgestellten Verfahren. Notwendigerweise bleibt im Vergleich zu einer 'echten' Mathematikvorlesung die mathematische Strenge etwas auf der Strecke. Es werden daher höchstens Beweisideen oder Beweisskizzen präsentiert. Außerdem soll speziell auf den besonderen Umgang der Physiker mit der Mathematik hingewiesen werden.

Für Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar. Sie können auch per email an mich (as@thp.uni-koeln.de) geschickt werden. Die jeweils aktuellste Version des Skripts ist im Internet über meine Homepage

<http://www.thp.uni-koeln.de/~as>

verfügbar.

Krankheitsbedingt wurde ich zu Beginn der Vorlesung durch Herrn Priv.-Doz. Dr. Rochus Klesse vertreten. Daher spiegeln die ersten Kapitel dieses Skripts (insbesondere Kapitel 1.1 - 1.3 und Kapitel 4) nicht exakt den Verlauf der Vorlesung wider. Kapitel 2 wird außerdem erst an späterer Stelle behandelt.

Andreas Schadschneider

Literaturempfehlungen

Im folgenden finden Sie eine kommentierte Auswahl der populärsten Lehrbücher. Die Vorlesung orientiert sich nicht speziell an einem Buch. Ich empfehle Ihnen deshalb, sich vor einem eventuellen Kauf zunächst die einzelnen Werke gründlich anzusehen. Alle sind in der Studentbibliothek vorhanden.

- S. Großmann: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (Teubner-Verlag)
Preiswerte Einführung in die wichtigsten mathematischen Techniken. Kann während des gesamten Studiums verwendet werden, insbesondere als Nachschlagewerk. Es werden allerdings nicht alle Themen der Vorlesung behandelt.
Preis: ca. 30 Euro
- C.B. Lang, N. Pucker: *Mathematische Methoden in der Physik* (Spektrum)
Ein neueres Lehrbuch, das alle Themen der Vorlesung umfasst. Enthält auch zahlreiche Übungsaufgaben mit Lösungen.
Preis: ca. 45 Euro
- K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence: *Mathematical Methods for Physics and Engineering* (Cambridge University Press)
Ein englischsprachiges Lehrbuch, das sehr ausführlich ist (mehr als 1300 Seiten!). Ergänzend finden sich zahlreiche Übungsaufgaben zum Selbststudium.
- H. Fischer, H. Kaul: *Mathematik für Physiker* (Teubner), 3 Bände
Eine dreibändige Klassiker, der den Stoff der Vorlesung weitgehend abdeckt und darüber hinaus weitere Themen sehr detailliert diskutiert. Ist auch für die Mathematik-Vorlesung nützlich.
Preis: ca. 40 Euro pro Band

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoren	7
1.1	Vektorräume	8
1.2	Vektoralgebra	9
1.3	Basis eines Vektorraumes	11
1.4	Koordinatensysteme	12
1.4.1	Kartesische Koordinaten	12
1.4.2	(Ebene) Polarkoordinaten	13
1.4.3	Zylinderkoordinaten	13
1.4.4	Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten)	14
2	Matrizen und Lineare Gleichungssysteme	17
2.1	Lineare Abbildungen	17
2.2	Matrizen	18
2.3	Determinanten	21
2.4	Lineare Gleichungssysteme	23
2.4.1	Gauß-Algorithmus	23
3	Komplexe Zahlen	27
3.1	Definition und Rechenregeln	27
3.2	Komplexe Ebene	28
3.3	Eulersche Formel	30
3.4	Wurzeln	31
4	Funktionen und Differentiation	33
4.1	Eigenschaften von Funktionen	33
4.2	Elementare Funktionen	36
4.2.1	Potenzfunktion	36
4.2.2	Exponentialfunktion	37
4.2.3	Logarithmus	38
4.2.4	Trigonometrische Funktionen	40
4.3	Differentiation	45
4.4	Potenzreihen und Taylor-Entwicklung	48

4.4.1	Potenzreihen	48
4.4.2	Taylor-Entwicklung	48
5	Integration	51
5.1	Stammfunktion	51
5.2	Bestimmtes Integral	52
5.3	Integrationsverfahren	54
5.3.1	Partielle Integration	55
5.3.2	Substitutionsregel	56
5.3.3	Ableitung nach Parameter	57
5.4	Uneigentliche Integrale	58
5.4.1	Integration über ein unbeschränktes Intervall	59
5.4.2	Integration über Polstellen	60
6	Differentialgleichungen	61
6.1	Klassifikation von DGL	61
6.2	Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	62
6.2.1	Homogener Fall	62
6.2.2	Inhomogener Fall	65
6.3	Allgemeine lineare DGL 1. Ordnung	66
6.3.1	Homogener Fall	66
6.3.2	Inhomogener Fall	67
6.4	Nichtlineare DGL	68
6.4.1	DGL mit getrennten Variablen	68
6.4.2	Bernoulli-Gleichung	69
7	Vektoranalysis	71
7.1	Partielle Ableitung und totales Differential	72
7.2	Gradient	74
7.3	Divergenz	76
7.4	Rotation	78
8	Wegintegral und mehrdimensionale Integration	81
8.1	Wegintegrale	81
8.2	Wegunabhängigkeit und Potential	84
8.3	Mehrdimensionale Integrale	86
8.4	Integration in krummlinigen Koordinaten	88
9	Die Integralsätze von Gauß und Stokes	93
9.1	Flächenintegrale und Vektorfluss	93
9.2	Der Greensche Satz in der Ebene	95
9.3	Integraldarstellung der Rotation	98
9.4	Integralsatz von Stokes	99

9.5	Integraldarstellung der Divergenz	100
9.6	Gaußscher Satz	102
10	Fourierreihen und Integraltransformationen	105
10.1	Funktionenräume	105
10.2	Fourierreihen	107
10.3	Fourier-Transformation	112
10.3.1	Delta-Funktion	117
10.3.2	Anwendung: DGL	119
11	Operatoren und Eigenwerte	121
11.1	Eigenwerte von Matrizen	121
11.1.1	Theoreme zum Eigenwertproblem	126
11.2	Operatoren	127
11.3	Eigenwertproblem für Operatoren	129
11.4	Operatoren in der Quantenmechanik	130
12	Symmetrien und Gruppen	133
12.1	Symmetrien	133
12.2	Gruppen	134
12.3	Wichtige Gruppen	135
12.3.1	Permutationsgruppe	135
12.3.2	Matrixgruppen	136
12.4	Darstellungen	138
12.5	Tensorrechnung	139
12.5.1	Definition	139
12.5.2	Rechenregeln für Tensoren	142
13	Differentialgleichungen II	145
13.1	Systeme von Differentialgleichungen	145
13.1.1	Lineare Differentialgleichungssysteme	146