
Andreas Schadschneider

Mathematische Methoden der Physik

Version: 2. Juli 2008

Sommersemester 2008

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skript zu Vorlesung *Mathematische Methoden* ersetzt nicht den regelmässigen Besuch der Vorlesungen. Es ist als Ergänzung gedacht, zum Nacharbeiten oder zur Vorbereitung auf Klausuren und Prüfungen. Deshalb sollten alle Formeln und Aussagen immer kritisch betrachtet werden, es könnten noch Druckfehler enthalten sein!

Wesentlicher Bestandteil der Vorlesung *Mathematische Methoden* sind die Übungen. Gerade in den ersten Semestern ist es unbedingt erforderlich, den Stoff durch eigenständiges Bearbeiten von Übungsaufgaben zu vertiefen.

Ziel der Vorlesung und der dazu gehörigen Übungen ist die Vermittlung grundlegender mathematischer Techniken und Fähigkeiten, die zur Lösung physikalischer Aufgabenstellungen benötigt werden. Im ersten Teil werden die mathematischen Techniken und Methoden eingeführt, die zum Verständnis der Vorlesungen "Experimentalphysik I+II" notwendig sind. Schwerpunkt des zweiten Blocks ist die Vorbereitung auf die Kursvorlesungen der Theoretischen Physik. Die meisten der hier vorgestellten Methoden sind nicht Gegenstand der Mathematikvorlesung.

Wesentliches Ziel der Vorlesung ist die praktische Beherrschung der vorgestellten Verfahren. Notwendigerweise bleibt im Vergleich zu einer 'echten' Mathematikvorlesung die mathematische Strenge etwas auf der Strecke. Es werden daher höchstens Beweisideen oder Beweisskizzen präsentiert. Außerdem soll speziell auf den besonderen Umgang der Physiker mit der Mathematik hingewiesen werden.

Für Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar. Sie können auch per email an mich (as@thp.uni-koeln.de) geschickt werden. Die jeweils aktuellste Version des Skripts ist im Internet über meine Homepage

<http://www.thp.uni-koeln.de/~as>

verfügbar.

Andreas Schadschneider

Literaturempfehlungen

Im folgenden finden Sie eine kommentierte Auswahl der populärsten Lehrbücher. Die Vorlesung orientiert sich nicht speziell an einem Buch. Ich empfehle Ihnen deshalb, sich vor einem eventuellen Kauf zunächst die einzelnen Werke gründlich anzusehen. Alle sind in der Studentbibliothek vorhanden.

- S. Großmann: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (Teubner-Verlag)
Preiswerte Einführung in die wichtigsten mathematischen Techniken. Kann während des gesamten Studiums verwendet werden, insbesondere als Nachschlagewerk. Es werden allerdings nicht alle Themen der Vorlesung behandelt.
Preis: ca. 30 Euro
- C.B. Lang, N. Pucker: *Mathematische Methoden in der Physik* (Spektrum)
Ein neueres Lehrbuch, das alle Themen der Vorlesung umfasst. Enthält auch zahlreiche Übungsaufgaben mit Lösungen.
Preis: ca. 45 Euro
- K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence: *Mathematical Methods for Physics and Engineering* (Cambridge University Press)
Ein englischsprachiges Lehrbuch, das sehr ausführlich ist (mehr als 1300 Seiten!). Ergänzend finden sich zahlreiche Übungsaufgaben zum Selbststudium.
- H. Fischer, H. Kaul: *Mathematik für Physiker* (Teubner), 3 Bände
Eine dreibändige Klassiker, der den Stoff der Vorlesung weitgehend abdeckt und darüber hinaus weitere Themen sehr detailliert diskutiert. Ist auch für die Mathematik-Vorlesung nützlich.
Preis: ca. 40 Euro pro Band

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoren	7
1.1	Vektorräume	8
1.2	Vektoralgebra	9
1.3	Basis eines Vektorraumes	11
1.4	Koordinatensysteme	12
1.4.1	Kartesische Koordinaten	12
1.4.2	(Ebene) Polarkoordinaten	13
1.4.3	Zylinderkoordinaten	13
1.4.4	Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten)	14
2	Matrizen und Lineare Gleichungssysteme	17
2.1	Lineare Abbildungen	17
2.2	Matrizen	18
2.3	Determinanten	21
2.4	Lineare Gleichungssysteme	23
2.4.1	Gauß-Algorithmus	24
3	Funktionen und Differentiation	27
3.1	Eigenschaften von Funktionen	27
3.2	Elementare Funktionen	30
3.2.1	Potenzfunktion	30
3.2.2	Exponentialfunktion	31
3.2.3	Logarithmus	32
3.2.4	Trigonometrische Funktionen	34
3.3	Differentiation	39
3.4	Potenzreihen und Taylor-Entwicklung	41
3.4.1	Potenzreihen	41
3.4.2	Taylor-Entwicklung	42
4	Vektoranalysis	45
4.1	Partielle Ableitung und totales Differential	46
4.2	Gradient	49

4.3	Divergenz	51
4.4	Rotation	52
5	Integration	55
5.1	Stammfunktion	55
5.2	Bestimmtes Integral	56
5.3	Integrationsverfahren	58
5.3.1	Partielle Integration	59
5.3.2	Substitutionsregel	60
5.3.3	Ableitung nach Parameter	61
5.4	Uneigentliche Integrale	62
5.4.1	Integration über ein unbeschränktes Intervall	63
5.4.2	Integration über Polstellen	64
6	Wegintegral und mehrdimensionale Integration	65
6.1	Wegintegrale	65
6.2	Wegunabhängigkeit und Potential	68
6.3	Mehrdimensionale Integrale	70
6.4	Integration in krummlinigen Koordinaten	72
6.5	Flächenintegrale und Vektorfluss	76
7	Die Integralsätze von Gauß und Stokes	79
7.1	Der Greensche Satz in der Ebene	79
7.2	Integraldarstellung der Rotation	81
7.3	Integralsatz von Stokes	82
7.4	Integraldarstellung der Divergenz	84
7.5	Gaußscher Satz	86
8	Komplexe Zahlen	89
8.1	Definition und Rechenregeln	89
8.2	Komplexe Ebene	90
8.3	Eulersche Formel	92
8.4	Wurzeln	93
9	Differentialgleichungen	95
9.1	Klassifikation von DGL	95
9.2	Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	96
9.2.1	Homogener Fall	96
9.2.2	Inhomogener Fall	99
9.3	Allgemeine lineare DGL 1. Ordnung	100
9.3.1	Homogener Fall	100
9.3.2	Inhomogener Fall	101
9.4	Nichtlineare DGL	102

9.4.1	DGL mit getrennten Variablen	102
9.4.2	Bernoulli-Gleichung	103
10	Fourierreihen und Integraltransformationen	105
10.1	Funktionenräume	105
10.2	Fourierreihen	107
10.3	Fourier-Transformation	112
10.3.1	Delta-Funktion	117
10.3.2	Anwendung: DGL	119
11	Operatoren und Eigenwerte	121
11.1	Eigenwerte von Matrizen	121
11.1.1	Theoreme zum Eigenwertproblem	126
11.2	Operatoren	127
11.3	Eigenwertproblem für Operatoren	129
11.4	Operatoren in der Quantenmechanik	130
12	Differentialgleichungen II	133
12.1	Systeme von Differentialgleichungen	133
12.1.1	Lineare Differentialgleichungssysteme	134
12.1.2	Dynamische Systeme	136
12.2	DGL als Eigenwertproblem	137
12.3	Spezielle DGL	139
12.3.1	Legendre'sche DGL	139
12.3.2	Kugelflächenfunktionen	140
12.3.3	Bessel'sche DGL	142
12.3.4	Hermite'sche DGL	143
12.3.5	Laguerre'sche DGL	143
12.4	Partielle DGL	143
12.4.1	Wichtige pDGL der Physik	144
12.5	Lösungsverfahren für pDGL; Green'sche Funktionen	145
12.5.1	Integraldarstellung	146
12.5.2	Integraltransformation	146
12.5.3	Green'sche Funktion	147
12.5.4	Separation der Variablen	149
13	Symmetrien und Gruppen	151
13.1	Symmetrien	151
13.2	Gruppen	152
13.3	Wichtige Gruppen	153
13.3.1	Permutationsgruppe	153
13.3.2	Matrixgruppen	154
13.4	Darstellungen	156

13.5	Tensorrechnung	157
13.5.1	Definition	157
13.5.2	Rechenregeln für Tensoren	160