Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
1. Übung

Sommersemester 2008

Bitte schreiben Sie stets Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe am 14.04.2008 vor der Vorlesung

1. Analytische Geometrie und Vektorrechung *3+4+3+12 Punkte*

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden, die durch die Gleichungen

$$g_1 : \quad 2x + 3y = -2 \qquad \text{und} \qquad g_2 : \quad x - 2y = 1$$

gegeben sind.

Bem.: Diese Aufgabe sollen Ihre Kenntnisse in analytischer Geometrie auffrischen.

b) Zeichnen Sie die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie graphisch deren Differenz. Zeichnen Sie dazu die Differenz $\vec{v} - \vec{w}$ ebenfalls als Vektor (ausgehend vom Ursprung) in Ihr Diagramm.

c) Bestimmen Sie alle Vektoren der Ebene $\mathbb{R}^2$, die die Länge 2 haben und auf $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

d) Betrachtet werden die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen sie zu jedem dieser Vektoren v_i einen Vektor w_i, der die gleiche Richtung aber Länge 1 hat. Bestimmen Sie die Winkel zwischen jeweils 2 der Vektoren. Berechnen Sie ebenfalls die Kreuzprodukte zwischen jedem Vektorenpaar.

2. Polarkoordinaten *8+6+4 Punkte*

a) Die folgenden Punkte der Ebene sind in kartesischen Koordinaten gegeben. Finden Sie deren Polarkoordinaten

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

b) Für die nachstehend aufgeführten Polarkoordinaten, finden Sie die kartesischen Komponenten (ohne Rundung!)

$$\left(r = 3,\ \varphi = \tfrac{\pi}{6} \right) \quad ; \quad \left(r = \sqrt{3},\ \varphi = -\tfrac{\pi}{3} \right) .$$

c) Ein Teilchen bewege sich in der Ebene auf einer Kreisbahn (Radius r) mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Geben Sie die Teilchenbahn sowohl in kartesischen, als auch in Polarkoordinaten an.

3. Vektorraumbasen *Präsenzaufgabe*

Wie Sie aus der Vorlesung wissen, sind *Vektoren* im allgemeinen Elemente eines *Vektorraumes*, also einer Menge mit einer vorgegebenen Struktur, die durch die Ihnen schon bekannten Vektorraumaxiome bestimmt ist.
Vektoren müssen daher nicht immer eine unmittelbare geometrische Bedeutung haben! Auch ganz abstrakte Objekte kann man als Vektoren auffassen, wenn eine geeignete „Addition" und „skalare Multiplikation" definiert hat, so dass die Vektorraumaxiome erfüllt sind. Ein wichtiges Beispiel sind Funktionen. Dort hat man eine natürliche Addition, nämlich punktweise ($h = f + g$, falls für alle x gilt: $h(x) = f(x) + g(x)$) und ähnlich für die skalare Multiplikation. Erfüllt eine Menge von Funktionen die Vektorraumaxiome, so kann man die Funktionen auch als Vektoren interpretieren. Dies ist in der Physik in vielen Situationen nützlich und im Laufe Ihres Studiums werden Ihnen viele Beispiele begegnen. Insbesondere in der Quantenmechanik werden Sie gar Vektorräume mit einer zusätzlichen metrischen Struktur kennenlernen: die Hilberträume.
Um Sie schon etwas mit abstrakten Vektorräumen vertraut zu machen, betrachten wir den Vektorraum $\mathcal{P}_4$ der Polynome in einer Unbekannten X bis Grad 4.
Aus der Vorlesung ist bekannt, daß man durch die Wahl einer Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_d\}$ einen jeden (endlichdimensionalen) Vektorraum V der Dimension d mithilfe einer linearen Koordinatenabbildung (in der Literatur auch kurz *lineare Karte* genannt)

$$\Psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad ; \quad b_i \mapsto \vec{e}_i ,$$

mit dem $\mathbb{R}^d$ identifizieren kann.
In unserem Fall ist eine naheliegende Basis $\mathcal{B}_1$ gegeben durch

$$1_{\mathcal{P}_4} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} , \quad X \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} , \quad X^2 \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} , \quad X^3 \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} , \quad X^4 \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} .$$

a) Ermitteln Sie den Koordinatenvektor (in der Basis $\mathcal{B}_1$) des Polynoms $p = (X-1)^2(X+2)$.

In bestimmten Situationen kann es jedoch auch sinnvoll sein, andere Basen zu wählen. So haben beispielsweise die sog. *Legendrepolynome* p_n die nützliche Eigenschaft, daß sie paarweise orthogonal bezüglich des Skalarproduktes (wir werden später eine abstrakte, nicht geometrische Definition von Skalarprodukten kennenlernen!)

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, f(x) \cdot g(x)$$

sind, d.h. es gilt $\langle p_n, p_m \rangle = 0$ falls $n \neq m$. Die Legendrepolynome bis Grad 4 sind gegeben durch

$$p_0 = 1 , \quad p_1 = X , \quad p_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1) , \quad p_3 = \frac{1}{2}(5X^3 - 3X) , \quad p_4 = \frac{1}{8}(35X^4 - 30X^2 + 3) .$$

b) Stellen Sie $p = (X-1)^2(X+2)$ in den Koordinaten der Basis $\mathcal{B}_2 = \{p_0, \ldots, p_4\}$ dar.

Bemerkung. Die Aufgabe ist einfach und nicht sehr rechenintensiv, wenn man bedenkt, welche Koordinaten von vornherein 0 sein müssen.