Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
2. Übung

Sommersemester 2008

Bitte schreiben Sie stets Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe am 21.04.2008 vor der Vorlesung

Vergessen Sie nicht, die Aufgabe 2 des ersten Blattes mitzubearbeiten!

1. Vektoridentitäten *2 + 4 Punkte*

a) Zeigen Sie an Hand der Komponentendarstellung, daß das Kreuzprodukt schiefsymmetrisch ist, d.h. daß

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Wenn Sie begründen können, warum es ausreichend ist, brauchen Sie diese Identität nur für die erste Komponente zeigen.

b) Rechnen Sie die bac-cab-Regel nach!

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Auch hier genügt es, falls Sie eine Begründung liefern können, wenn Sie sich auf die erste Komponente beschränken.

2. Matrizen als lineare Abbildungen *4 + 10 Punkte*

In der letzten Woche haben Sie gelernt, daß man mit Hilfe einer linearen Koordinatenabbildung jeden abstrakten d-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit dem $\mathbb{R}^d$ identifizieren kann. In letzterem kann man auch besonders gut rechnen. Eine lineare Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ zwischen zwei Vektorräumen der Dimensionen m und n kann man in Koordinaten als Matrix $m(f) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ schreiben.

a) Rechnen Sie den fundamentalen Merksatz "*Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Standard-einheinheitsvektoren* $(e_1, \ldots, e_n)$." am speziellen Beispiel der allgemeinen 2×2-Matrix explizit nach.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad ; \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

b) Machen Sie sich den linearen Abbildungsmechanismus, der sich hinter dem Matrixkalkül verbirgt, mit den folgenden 2 Matrizen klar.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie dazu das Bild des Vektors v unter der Abbildung B, also Bv. Berechnen Sie anschließend das Bild von Bv unter der Abbildung A, d.h. $A(Bv)$. Vergleichen Sie dies mit dem Bild des Vektors v unter der Abbildung, die durch die Produktmatrix AB beschrieben ist, also $(AB)v$.
Führen Sie diese Rechnungen mit vertauschten Rollen von A und B nocheinmal durch. Erkennen Sie, warum Matrixmultiplikation im allgemeinen nicht kommutativ sein kann?

3. Determinante und Spatprodukt

6 + 8 + 2 Punkte

In dieser Aufgabe geht es darum, daß Sie üben, Determinanten zu berechnen, und verstehen, was sich hinter der Determinante, die ja ersteinmal nichts weiter ist als eine Zahl, anschaulich verbirgt.

a) Berechnen Sie, möglichst vorteilhaft, die folgenden Determinanten:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & d & e \end{pmatrix} \quad ; \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ b & c & d & 3 \\ 7 & e & 5 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) Das Skalarprodukt gibt eine Möglichkeit an die Hand, Vektorräume zu vermessen, also Längen von Vektoren zu bestimmen. In der Vorlesung haben Sie das (sog. euklidische) Skalarprodukt schon kennengelernt. Die Determinante einer quadratischen Matrix A ist nun ein Maß, inwieweit das orientierte Volumen des von den Standardeinheitsvektoren $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ausgespannten Spates durch die Abbildung verzerrt wird. Anders gesprochen, mißt die Determinante das orientierte Volumen des Spates, der durch die Bilder $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ aufgespannt wird. Der Begriff der Orientierung sollte Sie hierbei noch nicht sonderlich interessieren, er bezieht sich auf die Reihenfolge, also den Orientierungssinn der Basisvektoren und wirkt sich ausschließlich auf das Vorzeichen der Determinante aus.
In zwei Raumdimensionen ist das Problem leicht. Zeigen Sie, daß der Betrag der Determinante einer 2×2 Matrix genau dem Flächeninhalt des durch die Spalten aufgespannten Parallelograms entspricht! Auch in drei Raumdimensionen kennen Sie eine Gleichung für das Spatvolumen: das Spatprodukt. Aus dem eben Erläuterten folgt nun die Identität

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Rechnen Sie diese Identität explizit nach!

c) Erklären Sie kurz, bezugnehmend auf die geometrische Deutung der Determinante, den Zusammenhang zwischen Determinante und Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix!

4. Lineare Gleichungssysteme

10 + 4 Punkte

Lineare Gleichungssysteme sind in Anwendungen sehr wichtig. Eine naheliegende Aufgabe besteht beispielsweise darin, die Inverse zu einer gegebenen Matrix zu finden. Da, wie oben schon gesagt, die Spalten der Matrix den Bildern der Standardeinheitsvektoren entsprechen, läuft das Bilden der Inversen zu einer $d \times d$ Matrix A auf die d Gleichungssysteme

$$A \cdot s_i = e_i,$$

für $i \in \{1, \ldots, d\}$ hinaus, wobei s_i die i-te Spalte der Inversen bezeichnet.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch Bildung der Inversen.

b) Gegeben sei die 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit reellen Einträgen $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Determinante und die Spur von A. Bestimmen Sie die Inverse von A. Wann existiert diese nicht?