Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
3. Übung

Sommersemester 2008

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 28.04.2008 vor der Vorlesung

1. Leibnizformel für Determinanten *2 + 2 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie die Leibnizformel für Determinanten kennengelernt:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_n} \mathrm{sign}\,(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Beziehung folgende Eigenschaft der Determinante: $\det A^T = \det A$

b) Finden Sie zwei Matrizen, anhand derer Sie zeigen können, daß im allgemeinen

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

2. Trigonometrische Funktionen *3 + 3 Punkte*

a) Zeichnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$a\,\sin x = a\,\sin y$$

für $(x, y) \in [0, 4\pi] \times [0, 4\pi]$ in ein x-y-Koordinatensystem! Welche Werte von a machen eine Sonderbehandlung erforderlich? Für den Sonderfall reicht es, wenn Sie die Lösung analytisch beschreiben (keine Zeichnung).

b) Die Gleichung $\tan x = x$ ist transzendent, das heißt mit Ausnahme der trivialen Lösung kann man kein Element der Lösungsmenge als Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten darstellen. Finden Sie die kleinste positive Lösung graphisch.
Vergleichen Sie qualitativ die Lösungsmengen der Gleichungen

$$\tan x = x \qquad \text{und} \qquad x = \arctan x.$$

3. Stetigkeit und Differenzierbarkeit *3 + 10 + 2 Punkte*

Für den Stetigkeitsbegriff gibt es feste Definitionen. Beschränkt man sich auf reelle Funktionen, so ist es ausreichend, den Stetigkeitsbegriff an Grenzwerten festzumachen (Folgenstetigkeit): Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt folgenstetig im Punkt $a \in D_f$, falls für alle Folgen $(x_n) \in \mathbb{R}$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ die Folge $f(x_n)$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ erfüllt.

a) Begründen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,; \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ q & x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $x = 0$ für kein $q \in \mathbb{R}$ folgenstetig sein kann.

b) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; \qquad x \mapsto f(x) = x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}$$

in $x = 0$ folgenstetig ist. Zeigen Sie darüberhinaus, daß f in $x = 0$ differenzierbar ist, und bestimmen sie explizit die Ableitung im Punkt $x = 0$. (Die Pfiffigen unter Ihnen werden gemerkt haben, daß die (Folgen-)Stetigkeit zwingend aus der Differenzierbarkeit folgt. Gemeint ist aber, daß Sie beides separat prüfen.) Seien Sie vorsichtig, und halten sie sich eng an der Definition fest, sonst scheitern Sie! Bilden Sie nun die Ableitungsfunktion f' von f. Ist diese stetig in $x = 0$?

c) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, die zwar stetig differenzierbar aber nicht zweifach differenzierbar ist!

4. Ableitungen und Kurvendiskussion *8 + 7 Punkte*

In der vorigen Aufgabe standen konzeptionelle Besonderheiten der Definitionen von Differenzierbarkeit im Vordergrund. Hier geht es mehr darum, Ihre technisch-algorithmischen Fähigkeiten im Ableiten zu üben und die Resultate zu interpretieren.

a) Sei $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Versuchen Sie, die maximalen Definitionsbereiche der folgenden Funktionen so zu finden, daß die Funktionen überall (reell) differenzierbar sind, und berechnen Sie deren Ableitung!

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + \varphi(x)} ; \quad f_2(x) = \sin(\varphi(x)) ; \quad f_3(x) = \mathrm{e}^{-\log \varphi(x)} ; \quad f_4(x) = [\varphi(x)]^{\varphi(x)}$$

b) Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Geschwindigkeit der Teilchen eines idealen Gases. Unter Verwendung einer Größe α, die die Teilchenmasse sowie die Temperatur enthält, kann man die Dichte der Verteilung schreiben, als

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} ; \quad v \mapsto f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha^{-\frac{3}{2}} v^2 \exp\left[-\frac{v^2}{2\alpha} \right] .$$

Welche (physikalische) Einheit hat α? Berechnen Sie die Grenzwerte der Dichte für $v \to 0$ und $v \to \infty$! Finden Sie die Geschwindigkeit mit der maximalen Wahrscheinlichkeitsdichte! Schließen Sie aus der Lage des Maximums, auf das Monotonieverhalten von $\alpha(T, m)$, separat für die Temperatur und die Teilchenmasse. Finden Sie, falls vorhanden, die Wendepunkte der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(v)$.

5. Drehungen und Asymptotik *5 + 5 Punkte*

Die folgende Gleichung beschreibt eine Hyperbel mit Brennpunkt $f = \begin{pmatrix} e & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$ $(e^2 = a^2 + b^2)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a) Lösen Sie diese Gleichung geschickt nach einer geeigneten Variablen (x oder y) auf, wählen Sie einen der beiden möglichen Zweige und bestimmen Sie die Geraden, denen sich die Hyperbel asymptotisch nähert.

b) Eine Drehung der (kartesischen) Koordinaten um den Winkel φ wird durch die Matrix

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

erreicht. Zeigen Sie, daß die oben allgemein angegebene Hyperbel mit $a = b = \sqrt{2}$ bei einer Drehung um $\varphi = \pi/4$ in den Funktionsgraphen von $y = \frac{1}{x}$ überführt wird. Bestimmen Sie die Asymptoten dieses Graphen und rechnen Sie nach, daß diese nach einer Rücktransformation mit den oben von Ihnen gefundenen Asymptoten übereinstimmen. (Falls Sie $-1/x$ herausbekommen, haben Sie falschherum gedreht, das wird aber anerkannt!)