Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

# Mathematische Methoden der Physik
# 5. Übung

*Sommersemester 2008*

**Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.**

**Abgabe im Übungskasten am 19.05.2008 vor der Klausur**

## 0. Gelbe Karte

*-10 Punkte (bei Versagen)*

Heften Sie Ihre Lösungsblätter **fest** zusammen! Schreiben Sie Ihren Namen **und** die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung! Auch wenn es einigen schwerfallen mag, ist dies eine wichtige Übung, die nicht nur zur Erlangung dieses Scheines notwendig ist, sondern die Sie als eine der wesentlichsten technischen Fertigkeiten durch Ihr gesamtes Studium begleiten wird und sich insbesondere in Klausuren als unverzichtbar erweist. Deshalb sollten Sie diese Aufgabe auch selbstständig lösen, abschreiben hilft Ihnen nicht.

## 1. Skalar- und Vektorfelder

*8 + 12 + 10 Punkte*

**a)** Gegeben seien das Skalarfeld $F(x, y, z) = x^2y + yz$ sowie das Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} z^3 & y^3 & x^3 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} F$, $\operatorname{div} \vec{v}$ und $\operatorname{rot} \vec{v}$. Sind die folgenden Ausdrücke berechenbar? Wenn ja, berechnen Sie diese, falls nein, warum?
$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v})$, $\operatorname{rot}(\operatorname{div} F)$, $\operatorname{div}(\operatorname{grad} F)$.

**b)** Das Potentialfeld eines elektrischen Dipols ist gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E} = \operatorname{grad} \phi$, sowie dessen Rotation und Divergenz. Vergleichen Sie die Divergenz des elektrischen Feldes mit $\triangle\phi$! Wenn es Ihnen hilft, nehmen Sie an, daß $\vec{d} = d \cdot \vec{e}_z$. Skizzieren Sie das elektrische Dipolfeld für die eben angegebene Wahl des Dipolmomentes $\vec{d}$.

**c)** Um große Parabolspiegel herzustellen, versetzt man die Schmelze des Materials in Rotation. Wir vollziehen diesen Prozeß in dieser Aufgabe im Querschnitt nach, also auf die Ebene reduziert. Die Rotationsachse sei die $y$-Achse. Auf kleine Volumenelemente der Schmelze wirkt dann zum einen die Gravitationskraft $\vec{F}_{\mathrm{g}} = -mg\vec{e}_y$ und zum anderen die Fliehkraft $\vec{F}_{\mathrm{f}} = m\omega^2 x\vec{e}_x$. Da es sich bei der Schmelze um eine Flüssigkeit handelt, gibt es keine Scherkräfte, das Kraftfeld $\vec{F}(x, y) = \vec{F}_{\mathrm{f}} + \vec{F}_{\mathrm{g}}$ steht also senkrecht auf der Oberfläche der Schmelze. Bestimmen Sie das Tangentialfeld (dieses steht in jedem Punkt senkrecht auf der Kraft), und zeichnen Sie sowohl Kraft- als auch Tangentialfeld (mit verschiedenen Farben) in ein $x$-$y$-Diagramm. Das Tangentialfeld ist nur bis auf einen Faktor bestimmt, diesen setzen Sie gleich 1. Sie dürfen annehmen, daß $\omega^2 \cdot 1\text{Längeneinheit} = g$.

## 2. Partielle Ableitungen

*5 + 3 Punkte*

**a)** Die Zustandsgleichung für ideale Gase lautet $p \cdot V = nR \cdot T$. Zeigen Sie, daß für ideale Gase damit die Identität

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} = -1.$$

erfüllt ist. (Das naive Kürzen der Differentiale mit Ergebnis 1 führt also auf den Holzweg!)

**b)** Berechnen Sie

$$\partial_t f(\vec{r}_0 + t \cdot \vec{a})$$

für ein allgemeines Skalarfeld $f$ und konstante Vektoren $\vec{r}_0$ und $\vec{a}$. Zeigen Sie dann, daß das Ergebnis, ausgewertet an $t = 0$ genau der Richtungsableitung von $f$ in Richtung $\vec{a}$ an der Stelle $\vec{r}_0$ entspricht!

## 3. Integrale

*4 + 2 + 1 + 1 Punkte*

**a)** Berechnen Sie die folgenden (unbestimmten) Integrale:

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x \log x} \;; \quad I_2 = \int \mathrm{d}x\, \frac{\log x}{x^2} \;; \quad I_3 = \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{e}^x}{5 + 2\mathrm{e}^x} \;; \quad I_4 = \int \mathrm{d}x\, \sin^5 x \cdot \cos x.$$

**b)** Brechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4} \;; \quad \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, \cos^{32} x \cdot \sin^{49} x.$$

**c)** Wenn Sie die Übungsserie 4 erfolgreich bearbeitet haben, wissen Sie jetzt, daß $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Berechnen Sie

$$I = \int \mathrm{d}x\, \cosh^3 x$$

**d)** Zeigen Sie:

$$\tan x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

## 4. Wegintegral

*4 Punkte*

Berechnen Sie das Wegintegral über das Vektorfeld $\vec{f} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$, zwischen den Punkten $A = (1; 0)$ und $B = (0; 1)$ einmal entlang der Strecke $AB$ und nochmals entlang des Viertelkreises, der $A$ mit $B$ verbindet. Wenn Sie richtig gerechnet haben, bemerken Sie, daß das Integral unabhängig vom Weg ist. Dies ist jedoch nicht immer der Fall!