Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
6. Übung

Sommersemester 2008

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 26.05.2008 vor der Vorlesung

1. Wegintegrale

5 + 5 + 6 Punkte

a) Bestimmen Sie die Länge der logarithmischen Spirale im $\mathbb{R}^2$

$$\vec{\gamma} : \mathbb{R} \supset [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad [a; b] \ni t \mapsto \vec{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{Rt} \cos t & \mathrm{e}^{Rt} \sin t \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} .$$

Hierbei ist $R > 0$. Der Name erklärt sich übrigens aus $\log |\gamma(t)| = Rt$.

b) Der Durchhang einer, zwischen zwei Aufhängepunkten befestigten Kette (Seil) mit vorgegebener Länge unter dem Einfluß der Schwerkraft, wird beschrieben durch eine cosh-Funktion. Berechnen Sie die Länge der Kette, deren Durchhang durch folgende Funktion bestimmt ist:

$$y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - b.$$

Die Pfosten seien symmetrisch um $x = 0$ aufgestellt und haben den Abstand d.

c) Berechnen Sie das Wegintegral im Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} xy & 2x & y+z \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$ sowohl entlang des Weges $\vec{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} t^2 & t^2 & 2t \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$, als auch entlang $\vec{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} t & t & 2t^2 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$, wobei jeweils $t \in [0; 1]$.

2. Nichtkonservative Felder

3 + 7 Punkte

a) Mit Polarkoordinaten sind Sie nun schon vertraut. Jeder Punkt $(x; y)$ wird durch einen Abstand vom Ursprung $r(x, y)$ sowie einen Winkel bezüglich der x-Achse $\varphi(x, y)$ beschrieben. Berechnen Sie $\operatorname{grad} \varphi(x, y)$.

b) Berechnen Sie das Wegintegral (im $\mathbb{R}^2$) über das Vektorfeld

$$\vec{v} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

entlang eines Kreises mit Radius r um 0! Berechnen Sie dieses Integral nochmals, wobei Sie nun den Weg zweimal durchlaufen!

3. Uneigentliche Integrale *10 + 10 Punkte*

a) Betrachten Sie ein Integral, wie es etwa in Modellen der Quantenfeldtheorie vorkommt:

$$I_{\Lambda\Lambda_0}(m) = \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{r^{d-1}}{r^2 + m^2} \mathrm{d}r.$$

Was können Sie im Fall $\Lambda = 0$ über die Existenz des Grenzwertes $\lim_{m\to 0} I_{0\Lambda_0}(m)$ aussagen? Was läßt sich prinzipiell über die Existenz des Grenzwertes $\Lambda_0 \to \infty$ (bei festem Λ mit $0 < \Lambda < \Lambda_0$) feststellen? Der Parameter m bezeichnet die Masse, es ist also $m > 0$. Ebenfalls bezeichnet d die Dimension des Systems, wir gehen von $d \geq 1$ aus.

b) In Aufgabe 3 hatten wir uns bereits mit der Maxwell-Boltzmannverteilung für die Geschwindigkeit der Teilchen eines idealen Gases befaßt. Die Dichte ist gegeben durch:

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\,; \quad v \mapsto f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^{-\frac{3}{2}} v^2 \exp\left[-\frac{v^2}{2\alpha}\right].$$

Prüfen Sie deren Normierung, d.h. prüfen Sie, daß das Integral über die Dichte 1 ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor. Berechnen Sie zuerst das allgemeine Gaußintegral

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\cdot x^2},$$

indem Sie mit $[I(a)]^2$ starten, dieses als ein Integral über die Ebene auffassen und zu Polarkoordinaten übergehen. Wenn Sie bis hierher nicht kommen, schlagen Sie das Gaußintegral nach und fahren Sie fort (Sie verlieren jedoch 4 Punkte). Nachdem Sie das allgemeine Gaußintegral berechnet haben, verwenden Sie die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2 \mathrm{e}^{-a\cdot v} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\bigg|_{\mu=1} \mathrm{e}^{-a\mu\cdot v^2} = -\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\bigg|_{\mu=1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\mu\cdot v^2},$$

um die Aufgabe zu lösen. Freilich ist das Integrationsgebiet für die Geschwindigkeitsverteilungsdichte ein anderes, aber irgendwas müssen Sie ja auch selbstständig erledigen. Vielleicht helfen Symmetrien...

4. Vektoranalysis *4 Punkte*

Zeigen Sie $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \triangle$!