Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
7. Übung

Sommersemester 2008

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 02.06.2008 vor der Vorlesung

1. Schwerpunkte *9 + 9 Punkte*

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Ort, an dem man ihn unterstützen muß, damit er im Gleichgewicht bleibt. Er ist gegeben durch das Integral

$$\vec{r}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{M}\int_U \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r}\mathrm{d}V, \qquad M = \int_U \rho(\vec{r})\mathrm{d}V.$$

Hierbei sind $\rho : \mathbb{R}^3 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}$ sie Massendichte (welche außerhalb von U verschwindet), und M wie angegeben die Gesamtmasse des Körpers.

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt einer homogenen (Massendichte $\rho(x, y, z) = \rho_0$) Halbkugel H_R mit Radius R, spezifiziert durch

$$H_R = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0 \right\}.$$

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Vollzylinder $Z_{r,h}$ mit Radius r und Höhe h

$$Z_{r,h} = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = r^2,\ 0 \leq z \leq h \right\},$$

dessen Massendichte durch $\rho(x, y, x) = h - z$ beschrieben ist

2. Gaußsches Gesetz und Gaußscher Satz *8 + 8 Punkte*

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\varrho(r)$ (1) nach außen so wirkt, als sei die gesamte Ladung im Mittelpunkt vereinigt, und (2) daß äußere Schalen keinen Kraft ausüben. "Kugelsymmetrisch"bedeutet dabei, dass die Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ nur vom Abstand $r = |\vec{r}|$ abhängt, nicht von der Richtung.
Aus der Experimentalphysik-Vorlesung kennen Sie die erste Maxwell-Gleichung[1] (Gauß'sches Gesetz)

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\varrho(\vec{r}).$$

Zur Erinnerung: Das elektrische Feld wird über die Kraft auf eine Probeladung q definiert: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$.
Zeigen Sie mithilfe der Maxwell-Gleichung die obigen Aussagen (1) und (2)!
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Gauß auf Kugelvolumina zentriert um 0 an.

[1] Wir verwenden hier das von Theoretikern bevorzugte cgs-Einheitensystem. Im SI-System ist der Faktor 4π durch $1/\epsilon_0$ zu ersetzen!

3. Mehrfachintegrale

6 + 10 Punkte

a) Berechnen Sie den Fluß eines Vektorfeldes $\vec{v} = v_0 \cdot \vec{e}_z$ durch eine Kreisfläche (mit Radius r) in der x-y-Ebene. Berechnen Sie ebenso den Fluß des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch eine Halbkugeloberfläche, die auf dem Kreisring sitzt. Was beobachten Sie?

b) Im $\mathbb{R}^3$ entstehe ein Rotationskörper R durch Rotation des ebenen Flächenstückes F

$$F := \{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 \mid c \leq z \leq d,\ 0 \leq x \leq f(z)\}$$

um die z-Achse. Hierbei sei f eine stetige Funktion. Berechnen Sie das Volumen $|R|$ des Rotationskörpers und zeigen Sie die erste Guldinsche Regel:

$$|R| = 2\pi x_{\mathrm{s}} A_F.$$

Hierin ist A_F der Flächeninhalt von F und x_{s} die x-Koordinate des Schwerpunktes der Fläche (überlegen Sie sich, wie der Flächenschwerpunkt definiert ist!). Das Volumen ist also gleich dem Flächeninhalt der zu rotierenden Fläche mal der Weglänge des Weges, den der Schwerpunkt bei Rotation um die z-Achse zurücklegt.