
Mathematische Methoden der Physik

10. Übung

Sommersemester 2008

**Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.
Abgabe im Übungskasten am 23.06.2008 vor der Vorlesung**

1. Fourierreihen

4 + 8 + 5 Punkte

- a) Zeigen Sie den in der Vorlesung angegebenen Zusammenhang zwischen den reellen Fourierkoeffizienten a_n , b_n und den komplexen Koeffizienten c_n :

$$c_0 = \frac{b_0}{2}, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

- b) Zeigen Sie, daß das Funktionensystem

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx, \cos nx \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

für den Hilbertraum $H = (L^2[-\pi; \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)g(x)$$

ein Orthogonalsystem bildet. Wie erhält man daraus ein Orthonormalsystem? Vergessen Sie nicht zu zeigen, daß das angegebene Funktionensystem nur aus Elementen des Hilbertraumes H besteht! Es bedarf wohl hoffentlich keiner großen Erwähnung, daß zum Berechnen der auftretenden Integrale die Eulersche Formel nützlich sein kann...

- c) Zeigen Sie, daß die Fourierreihe der Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ durch

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

gegeben ist. Es ist interessant und instruktiv, sich Glieder der Partialsummenfolge für verschiedene obere Grenzen N einmal mit einem Computeralgebra- oder Numeriksystem zeichnen zu lassen. Versuchen Sie sich klarzumachen, was Sie beobachten, wenn die Glieder der Partialsummenfolge im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ zeichnen - auch wenn es dafür keine Punkte gibt.

2. Fourier-Transformation

4 + 2 + 6 Punkte

In der Vorlesung haben Sie die Fouriertransformation einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kennengelernt:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) e^{i\omega t}$$

- a) Zeigen Sie, daß folgende Symmetrieeigenschaften erfüllt sind:

| $f(t)$ | $F(\omega)$ |
|-----------------------|-----------------------|
| reell und gerade | reell und gerade |
| reell und ungerade | imaginär und ungerade |
| imaginär und gerade | imaginär und gerade |
| imaginär und ungerade | reell und ungerade |

b) Zeigen Sie den Verschiebungssatz:

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)]$$

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktionen (i) $\cos(\omega_0 t)$ und (ii) $\exp(-t^2/2)$.
Hinweis zu (ii): Sie dürfen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ verwenden.

3. Dichten und Deltafunktion

3 + 3 Punkte

In der Vorlesung haben Sie gelernt, daß sich die Massendichte einer Punktmasse m am Ort \vec{r}_0 mithilfe der Deltafunktion als $\rho(\vec{r}) = m\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ darstellen läßt. Dies wollen wir nun verallgemeinern. Drücken Sie die Dichte

- a) einer linienförmigen Massenverteilung entlang der z -Achse mit der Liniendichte σ
b) einer Kugelschale vom Radius R und der Gesamtmasse M

mithilfe der Deltafunktion aus. In allen Fällen sei die Gesamtmasse dabei homogen verteilt.
Hinweis: Liniendichte bezeichnet die Masse pro Längeneinheit.

4. Darstellungen der Deltafunktion

5 + 5 Punkte

Überzeugen Sie sich, daß die Deltafunktion folgende Darstellungen besitzt:

a)

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right)$$

b)

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

Zeigen Sie dazu, daß die Ausdrücke auf der rechten Seite (i) für $x \neq 0$ verschwinden, (ii) für $x = 0$ divergieren und (iii) integriert über $]-\infty, \infty[$ eins ergeben.

5. Deltafunktion und Fouriertransformation

5 Punkte

Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Im Umkehrschluß folgt daraus nun $\mathcal{F}^{-1}(1) = \sqrt{2\pi}\delta(t)$. Benutzen Sie diese Erkenntnis, und zeigen Sie damit die wichtige (distributive!) Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} = 2\pi\delta(t-t')$$

Erläuterung: Diese Identität gilt streng nur im distributiven Sinne, also angewandt auf Testfunktionen. Im strengen Sinne existiert das Integral natürlich nicht.